ELETTROMAGNETISMO E RELATIVITÀ

1. Preliminari: Equazioni di Maxwell e sistema di Maxwell-Lorentz

1.1. **Equazioni di Maxwell.** In unità di Gauss il sistema delle equazioni di Maxwell che descrive l'evoluzione dei campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$ in presenza di cariche con densità ρ e densità di corrente $\mathbf{j}$ prende la forma seguente (c è la velocità della luce nel vuoto)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{rot}\ \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & = & 0 \\ \mathrm{div}\ \mathbf{B} & = & 0 \\ \mathrm{rot}\ \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & = & \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \mathrm{div}\ \mathbf{E} & = & 4\pi\rho \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Nel seguito ci occuperemo solo di questo sistema, detto delle equazioni di Maxwell *nel vuoto*, e non del corrispondente sistema di Maxwell *in un mezzo materiale*. Il primo è considerato fondamentale, mentre il secondo ha carattere fenomenologico, perché contiene parametri che si riferiscono al particolare mezzo materiale che descrive, ovvero le funzioni (nel caso più semplice indipendenti da spazio e tempo) di permeabilità elettrica e magnetica. E' possibile, sebbene a costo di approssimazioni e di non semplici elaborazioni, derivare il secondo dal primo, ma rinviamo per questo alla letteratura.
Osserviamo in primo luogo che il sistema di Maxwell si riduce, nel caso in cui i campi elettrico e magnetico non varino nel tempo, a due sistemi disaccoppiati, uno per il campo elettrico e uno per il campo magnetico, che riproducono le equazioni fondamentali dell'elettrostatica e della magnetostatica (nel vuoto).
Più esplicitamente, per l'elettrostatica si ha il sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\ \mathbf{E} & = & 4\pi\rho \\ \mathrm{rot}\ \mathbf{E} & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

mentre la magnetostatica è governata dalle equazioni

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\ \mathbf{B} & = & 0 \\ \mathrm{rot}\ \mathbf{B} & = & \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Questi due sistemi assegnano, per ciascuno dei due campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, divergenza e rotore. La divergenza di un campo vettoriale, grazie al teorema di Gauss, dà informazioni sulle sorgenti del campo. In particolare, le sorgenti del campo elettrico sono le cariche elettriche, mentre il campo magnetico, solenoidale (ovvero a divergenza nulla), non ha sorgenti. Il rotore di un campo vettoriale, grazie al teorema di Stokes, stabilisce un legame tra il lavoro effettuato dal campo e il flusso del suo rotore. Nel caso del campo elettrico il campo è irrotazionale, e quindi la circuitazione di $\mathbf{E}$ è nulla: il campo è conservativo ed esiste una funzione scalare ϕ, detta potenziale elettrico, tale che $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\phi$. Nel caso del campo magnetico il rotore non è nullo e non esiste un potenziale scalare. D'altra parte i campi solenoidali ammettono un potenziale vettore: esiste cioè un ulteriore campo vettoriale $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$.

Torniamo ora al sistema di Maxwell originario. Esso descrive completamente una delle due teorie di campo fondamentali della Fisica Classica. L'altra teoria di campo fondamentale è la Teoria della Relatività Generale, che descrive il campo gravitazionale e la sua interazione con la geometria dello spaziotempo. Il sistema di Maxwell può essere riguardato sotto vari aspetti. Osserviamo per cominciare che le sorgenti ρ e $\mathbf{j}$ non sono indipendenti. Infatti derivando rispetto al tempo l'ultima equazione e tenendo presente la penultima segue, grazie all'identità di calcolo vettoriale div rot $\equiv 0$, che vale la cosiddetta equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0 \tag{1.4}$$

che esprime in forma differenziale la legge di conservazione della carica elettrica (teorema di Gauss). Se le sorgenti sono assegnate, occorre quindi che esse soddisfino l'equazione di continuità. (Se non lo sono, sarà la dinamica stessa a garantire tale requisito: le cariche si muovono secondo la legge data dalla forza di Lorentz, e l'evoluzione temporale di ρ e $\mathbf{j}$, per essere compatibile con le equazioni di Maxwell, è tale che l'equazione di continuità sia soddisfatta a tutti i tempi se è soddisfatta al tempo iniziale). Osserviamo inoltre che il sistema di Maxwell contiene due equazioni di evoluzione e due equazioni stazionarie. Queste ultime non concorrono a determinare il comportamento nel tempo dei campi, ma rappresentano vincoli sui dati iniziali per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.
Infatti, supponiamo che esse siano soddisfatte ad un istante fissato e che valgano le altre due equazioni; si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\ \mathbf{B} = \mathrm{div}\ \frac{\partial\ \mathbf{B}}{\partial t} = -c\ \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{B} = 0\ ,$$

e analogamente

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\ \mathbf{E} = \mathrm{div}\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\ \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\mathbf{B} - \mathrm{div}\ 4\pi\mathbf{j} = \frac{\partial\ (4\pi\rho)}{\partial t}\ .$$

Questo equivale a

$$\frac{\partial\ (\mathrm{div}\ \mathbf{B})}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\ (\mathrm{div}\ \mathbf{E} - 4\pi\rho)}{\partial t} = 0$$

Dunque le quantità (div $\mathbf{B}$) e (div $\mathbf{E} - 4\pi\rho$) sono costanti nel tempo, e se sono nulle al tempo iniziale, tali rimangono per tutti i tempi.
Individuati i vincoli imposti dal sistema di Maxwell, sia sulle sorgenti che sui dati iniziali, le equazioni rimaste libere costituiscono un sistema di equazioni di evoluzione, per la presenza delle due equazioni contenenti le derivate temporali di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Come tale risulta un sistema lineare di equazioni a derivate parziali del primo ordine (che rientra nella importante famiglia dei cosiddetti sistemi *iperbolici*), su cui sono noti teoremi di esistenza e unicità in piccolo e in grande sotto larghe ipotesi sia relativamente ai dati iniziali e che alla natura delle sorgenti.
Consideriamo ora la coppia omogenea delle equazioni di Maxwell, ovvero quella nella quale non compaiono le sorgenti; la prima, div $\mathbf{B} = 0$, come già detto, per un noto teorema di analisi vettoriale comporta che esista un campo vettoriale A, detto potenziale vettore, tale che

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}\ . \tag{1.5}$$

Questa identità, sostituita nella seconda equazione omogenea conduce a

$$\text{rot }(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

L'irrotazionalità garantisce l'esistenza di una funzione scalare ϕ, detta potenziale scalare, tale che (il segno meno è introdotto per convenzione)

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad }\phi \ .$$

o equivalentemente

$$\mathbf{E} = -\text{grad }\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \ . \tag{1.6}$$

I potenziali vettore e scalare non sono unici. Sia assegnata una qualunque funzione χ regolare, e definendo

$$\begin{cases} \phi' &= \quad \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \quad \mathbf{A} - \text{grad }\chi \end{cases} \tag{1.7}$$

si verifica subito che $\mathbf{A}'$ e ϕ' individuano gli stessi campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ individuati da $\mathbf{A}$ e ϕ.
La trasformazione dei potenziali $(\phi, \mathbf{A}) \to (\phi', \mathbf{A}')$ si dice trasformazione di gauge e la corrispondente invarianza dei campi si dice invarianza di gauge. La scelta di una particolare funzione di gauge χ si dice scelta del gauge. L'arbitrarietà è molto ampia; qui ci si limita a ricordare la scelta di gauge forse più generalmente adottata, quella che corrisponde al cosiddetto *gauge di Lorenz*

$$\text{div }\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \ , \tag{1.8}$$

Si verifichi per esercizio che dati $(\phi, \mathbf{A})$ arbitrari, si ottengono potenziali $(\phi', \mathbf{A}')$ soddisfacenti il gauge di Lorenz purché si effettui la trasformazione di gauge (1.7) definita da una funzione di gauge χ che soddisfa l'equazione delle onde inomogenea

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \text{div }\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} \ .$$

La scelta del gauge di Lorentz consente di riscrivere le equazioni di Maxwell in termini dei potenziali sotto una forma molto semplice e significativa. Le equazioni inomogenee forniscono infatti rispettivamente

$$4\pi\rho = \text{div }\mathbf{E} = -\Delta\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial(\text{div }\mathbf{A})}{\partial t} = -\Delta\phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

e

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \text{rot rot }\mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\text{grad }\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = -\Delta\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

dove nell'ultima uguaglianza è stata utilizzata la condizione di Lorenz e l'identità vettoriale

$$\text{rot rot }\mathbf{A} = \text{grad div }\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \ .$$

Introdotto l'operatore d'Alembertiano

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

le equazioni inomogenee, scritte in termini dei potenziali, assumono la forma di equazioni di d'Alembert con sorgenti assegnate

$$\Box\phi = 4\pi\rho \tag{1.9}$$

$$\Box\mathbf{A} = \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}\ . \tag{1.10}$$

Si tratta di equazioni delle onde *lineari* e *non omogenee.* Essendo equazioni di evoluzione, esse vanno corredate delle condizioni iniziali ed eventualmente, se il problema è posto in un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^3$, delle condizioni al bordo sulla frontiera di tale sottoinsieme. La linearità garantisce che ogni loro soluzione si scrive come somma della più generale soluzione dell'equazione omogenea (l'equazione delle onde libera) e di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Una soluzione della equazione non omogenea per il problema in tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ è data dai cosiddetti *potenziali ritardati*:

$$\phi_{ret}(x,t) = \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<c(t-t_0)} \frac{\rho(\mathbf{y}, t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dy \tag{1.11}$$

$$\mathbf{A}_{ret}(x,t) = \frac{1}{c}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<c(t-t_0)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}, t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dy\ . \tag{1.12}$$

I potenziali ritardati sono soluzioni nulle al tempo iniziale t_0, e in questa rappresentazione della soluzione il trasporto dei dati iniziali è completamente contenuto nella soluzione dell'omogenea, che anch'essa ha una forma ben nota (formula di Kirchhoff), qui non riportata. Nel caso, molto frequente, in cui il problema di Cauchy sia assegnato a $t_0 = -\infty$, cioè in un problema di scattering, le soluzioni ritardate prendono la forma

$$\phi_{ret}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{y}, t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dy \tag{1.13}$$

$$\mathbf{A}_{ret}(x,t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}, t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dy\ . \tag{1.14}$$

La teoria descritta presuppone che le sorgenti siano note. Veniamo ora alla situazione in cui, noti i campi elettromagnetici, si voglia determinare la dinamica delle sorgenti. Possiamo considerare il caso elementare e fondamentale di una singola particella puntiforme di carica q e massa m. Si assume allora che le azioni che i campi elettrico e magnetico esercitano sulla particella siano descritte dalla cosiddetta *forza di Lorentz*:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\wedge\mathbf{B}) \tag{1.15}$$

Pertanto, in ambito non relativistico, l'equazione di movimento di una particella carica sarà data dalla II legge di Newton con la forza di Lorentz $\mathbf{F}_L$ a secondo membro:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}) \ , \tag{1.16}$$

dove $p = m\mathbf{v}$ è la quantità di moto della particella. Il problema generale della dinamica del campo elettromagnetico in interazione con sorgenti puntiformi è allora descritto dalle equazioni di Maxwell 1.1 (nelle quali la densità di carica e di corrente sono quelle di una particella puntiforme, ovvero distribuzioni di Dirac concentrate sulla posizione della particella), accoppiate con la legge dinamica per la particella, la 1.16; il sistema non lineare così costituito prende il nome di sistema di Maxwell-Lorentz, e così come è scritto risulta non correttamente definita dal punto di vista matematico, perché il secondo membro della forza di Lorentz richiede di valutare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sulla posizione della particella; ma essi non sono definiti sulla posizione della particella, perché i potenziali ritardati che compaiono nella soluzione dell'equazione delle onde, per una particella puntiforme hanno andamento coulombiano proprio in corrispondenza della posizone della particella. E' invece chiara la posizione matematica del problema nel caso di sorgenti distribuite e descritte da funzioni abbastanza regolari ρ e $\mathbf{j}$; le conseguenze rigorose del sistema di Maxwell Lorentz circa la dinamica di campi e particelle sono però ancora largamente non note e attivo oggetto di studio.
Come ultima questione, affrontiamo il problema del bilancio di energia e momento in presenza di campi elettromagnetici. Consideriamo inizialmente il caso del sistema di Maxwell nel vuoto. Vale l'identità vettoriale

$$\mathrm{div}(\ \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{B} \ .$$

Anche questa identità si dimostra facilmente utilizzando il simbolo di Levi Civita. Il prodotto vettoriale si scrive

$$(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} E_j B_k \ ;$$

si ha allora (convenzione della sommatoria!)

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) = \partial_i(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})_i = \partial_i(\epsilon_{ijk}E_jB_k) = \epsilon_{ijk}(\partial_i E_j)B_k + \epsilon_{ijk}(\partial_i B_k)E_j = \epsilon_{kij}(\partial_i E_j)B_k - \epsilon_{jik}(\partial_i B_k)E_j$$

dove nell'ultima uguaglianza è stata utilizzata la proprietà di totale antisimmetria del simbolo di Levi Civita. D'altra parte si ha anche

$$\epsilon_{kij}(\partial_i E_j) = (\mathrm{rot}\mathbf{E})_k, \qquad \epsilon_{jik}(\partial_i B_k) = (\mathrm{rot}\mathbf{B})_j$$

e quindi la tesi.
Torniamo alle equazioni di Maxwell, e moltiplichiamo scalarmente per $\mathbf{B}$ e per $\mathbf{E}$ la legge dell'induzione e la legge di Ampere-Maxwell rispettivamente; facendo uso della precedente identità vettoriale, si ottiene

$$\frac{1}{2c}(\frac{\partial|\mathbf{E}|^2}{\partial t} + \frac{\partial|\mathbf{B}|^2}{\partial t}) + \mathrm{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = 0 \ .$$

Questa si scrive in modo più compatto definendo le due quantità

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \tag{1.17}$$

detta densità di energia del campo elettromagnetico, e

$$\mathbf{P}_{em} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}, \tag{1.18}$$

detta vettore di Poynting.

In termini di queste quantità la precedente equazione prende allora la forma del cosiddetto Teorema di Poynting:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{B}|^2)) + \mathrm{div}(\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) \ = \ 0, \tag{1.19}$$

o anche

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \mathrm{div}\ \mathbf{P}_{em} = 0 \tag{1.20}$$

Si osservi che il teorema di Poynting ha l'aspetto di una equazione di continuità dove il ruolo di densità è giocato da w_{em} e il ruolo di corrente è giocato da $\mathbf{P}_{em}$. Pertanto esso rappresenta la formulazione locale (o differenziale) di una legge di conservazione. Dal teorema della divergenza (o di Gauss) segue che la formulazione integrale della medesima legge di conservazione si ottiene integrandola su una regione Ω e utilizzando il teorema di Gauss

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_{em}\ dx = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{P}_{em}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma \tag{1.21}$$

dove $d\sigma$ è la misura superficiale sulla frontiera di $\partial\Omega$. Perciò la variazione nel tempo della quantità $\int_\Omega w_{em}dx$ è dovuta al flusso della quantità $\mathbf{P}_{em}$ attraverso la frontiera di Ω. Si attribuisce alla quantità w_{em} il significato di densità di energia elettromagnetica, in conformità al fatto che i due addendi che separatamente la compongono hanno il significato di densità di energia del campo elettrico e di densità di energia del campo magnetico rispettivamente in situazioni stazionarie. Corrispondentemente, il vettore di Poynting rappresenta il flusso (o corrente) di energia elettromagnetica.
Più in generale, in presenza di cariche e correnti, il teorema di Poynting è espresso dall'equazione seguente (la deduzione è identica, a partire dalla coppia di Maxwell di evoluzione)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{B}|^2)) + \mathrm{div}(\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \tag{1.22}$$

Il termine supplementare è la densità di potenza delle forze elettromagnetiche. Come deve essere, in quest'ultimo termine non compare la potenza delle forze associate alla parte dipendente dal campo magnetico della forza di Lorentz, che essendo ortogonale alla velocità dà contributo nullo. La versione integrale è

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_{em}\ dx = -\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}_{em}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma + \frac{4\pi}{c}\int_\Omega \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\ dx\ . \tag{1.23}$$

Se ad esempio consideriamo il caso della corrente associata ad una singola carica puntiforme di massa m e carica q, si ha $\mathbf{j} = q\mathbf{v}(t)\delta_{\mathbf{x}(t)}$, dove $\delta_{\mathbf{x}(t)}$ è la misura di Dirac concentrata in $\mathbf{x}(t)$.
Consideriamo, in questo caso particolarmente istruttivo, la legge di bilancio dell'energia in forma integrale, che si ottiene al solito integrando la 1.21 su una regione Ω e usando il teorema di Gauss e la definizione di distribuzione di Dirac:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_{em}dx = -\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}_{em}\cdot\mathbf{n}d\sigma - q\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}(t),t) \tag{1.24}$$

D'altra parte per l'ultimo termine si ha, grazie al teorema dell'energia cinetica applicato all'equazione di Newton con la forza di Lorentz,

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2) = q\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}(t),t) \tag{1.25}$$

e dunque

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega w_{em}dx + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2\right) = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{P}_{em}\cdot\mathbf{n}d\sigma \tag{1.26}$$

Pertanto la variazione di energia totale, *del campo e della particella* all'interno della regione Ω, è dovuta al flusso del vettore di Poynting $\mathbf{P}_{em}$ attraverso la frontiera $\partial\Omega$. Se Ω invade tutto lo spazio e i campi decadono abbastanza rapidamente con la distanza, o se sui punti di $\partial\Omega$ i campi elettromagnetici sono nulli (ad esempio perché non vi sono ancora giunti quelli creati nel passato all'interno di Ω), allora il secondo membro si annulla e si ha conservazione dell'energia *totale* del sistema:

$$\int_{\mathbb{R}^3} w_{em}(x,t)dx + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} w_{em}(x,0)dx + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(0)|^2 = E_{em} + E_{mech} = E_{tot}\ .$$

Questa comprende sia un addendo di origine meccanica (l'energia cinetica della particella) sia un addendo associato al campo elettromagnetico. Inoltre, poiché i due contributi non sono separatamente conservati, sono a priori possibili scambi di energia fra i gradi di libertà della particella e quelli del campo elettromagnetico.

Veniamo ora alla quantità di moto.

Di nuovo si parte dalla coppia non omogenea delle equazioni di Maxwell. Moltiplicando la prima (che è scalare) per $\mathbf{E}$ e la seconda (vettorialmente) per $\mathbf{B}$ si ottengono le

$$\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) = 4\pi\rho\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}\wedge\nabla\wedge\mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{B}\wedge\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\wedge\mathbf{B}$$

Sottraendole membro a membro si giunge all'identità

$$\frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{c}\mathbf{B}\wedge\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B}\wedge\nabla\wedge\mathbf{B}\right] = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\wedge\mathbf{B} \tag{1.27}$$

Ci siamo così procurati una rappresentazione della densità di forza di Lorentz (il membro di destra nell'espressione precedente) in termini del campo elettromagnetico; questo in vista di ottenere un legame tra il campo e la quantità di moto meccanica della materia carica, legame che farà uso della legge di Newton-Lorentz. Per il momento continuiamo a manipolare l'espressione a primo membro. Si ha

$$\mathbf{B}\wedge\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E}\wedge\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})}{\partial t} = -c\mathbf{E}\wedge\nabla\wedge\mathbf{E} - \frac{\partial(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})}{\partial t}$$

dove nel primo passaggio si sono usate la proprietà di Leibnitz della derivata e l'anticommutatività del prodotto vettoriale, e nel secondo una delle due equazioni omogenee di Maxwell. Sostituendo questa identità nella precedente, e sommando a primo membro la quantità $\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B})$ (nulla per l'altra equazione di Maxwell omogenea), l'identità 1.27 si può riscrivere come

$$\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) + \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{S} \tag{1.28}$$

dove il campo vettoriale $\mathbf{S}$ è definito da

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}\wedge\nabla\wedge\mathbf{E}] + [\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\wedge\nabla\wedge\mathbf{B}]\} \tag{1.29}$$

Identifichiamo il campo vettoriale $\mathbf{S}$.

Intanto è chiara la simmetria tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Consideriamo i termini dipendenti da $\mathbf{E}$, e riscriviamoli per componenti tenendo presente l'identità vettoriale

$$\mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = \frac{1}{2}\nabla(|\mathbf{E}|^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

Si ottiene

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}_k - [\mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}]_k = (\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}_k + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}_k - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(|\mathbf{E}|^2)$$

e si riconosce nella somma dei primi due termini a secondo membro una divergenza:

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}_k + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}_k = \frac{\partial}{\partial x_l}(E_k E_l)$$

sicché

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}_k - [\mathbf{E} \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}]_k = \frac{\partial}{\partial x_l}[E_k E_l - \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2)\delta_{lk}]$$

Un'espressione analoga è valida per i termini contenenti $\mathbf{B}$ in 1.27.
Ne segue che possiamo scrivere

$$S_k = -\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{4\pi}[(\frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)\delta_{lk} - E_k E_l - B_k B_l] = -\frac{\partial}{\partial x_l}\tau_{kl}$$

o anche più sinteticamente,

$$\mathbf{S} = \nabla \cdot \tau \tag{1.30}$$

Dunque il campo vettoriale $\mathbf{S}$ è la divergenza di un tensore simmetrico (euclideo) di rango 2, qui denominato con τ e detto *tensore degli sforzi elettromagnetici* o *tensore degli sforzi di Maxwell*, dato in componenti da:

$$\tau_{lk} = \frac{1}{4\pi}[(\frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)\delta_{lk} - E_k E_l - B_k B_l] \tag{1.31}$$

Tramite il tensore degli sforzi, possiamo finalmente scrivere l'equazione

$$\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_k + \rho E_k + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}]_k = -\frac{\partial}{\partial x_l}\tau_{kl} \tag{1.32}$$

o in forma vettoriale

$$\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}] = -\nabla \cdot \tau \tag{1.33}$$

Il significato del tensore degli sforzi elettromagnetici è legato alla legge di bilancio della quantità di moto, come ora vedremo.
Integriamo l'eq. 1.29 su una regione Ω. Si ottiene

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}\ d^3\mathbf{x} + \int_\Omega \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}\ d^3\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla \cdot \tau\ d^3\mathbf{x} \tag{1.34}$$

Il secondo addendo a primo membro è la forza di Lorentz esercitata sulle cariche presenti in Ω dal campo elettromagnetico, e coincide pertanto con la derivata temporale della quantità di moto meccanica delle particelle per l'equazione di Lorentz.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_{mecc} = \int_\Omega (\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})\ d^3\mathbf{x}$$

Il termine a secondo membro è l'integrale di una divergenza, e quindi tramite il teorema di Gauss (applicato componente per componente)

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l}\tau_{kl}\ d^3\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \tau_k(\mathbf{n}(\sigma))\ d\sigma$$

dove $\tau_k(\mathbf{n}(\sigma))$ indica la k-esima componente del campo vettoriale che si ottiene applicando τ al vettore (campo vettoriale su $\partial\Omega$, per la precisione) normale esterna $\mathbf{n}(\sigma)$ a $\partial\Omega$. In componenti,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l}\tau_{kl}\ d^3\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \tau_{kl} n^l\ d\sigma$$

Si tratta dunque, per ogni k fissato, del flusso attraverso $\partial\Omega$ della quantità rappresentata dal campo vettoriale di componenti $\tau_{k,l}$.
E' spontaneo dunque riscrivere la 1.34 nel modo seguente

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_{em} + \mathbf{P}_{mecc}) = -\int_{\partial\Omega} \tau(\mathbf{n})\ d\sigma \tag{1.35}$$

dove si è definito

$$\mathbf{G}_{em} = \int_\Omega \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \tag{1.36}$$

La stessa equazione per componenti si scrive

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_{em} + \mathbf{P}_{mecc})_k = -\int_{\partial\Omega} \tau_{kl} n^l\ d\sigma \tag{1.37}$$

Osserviamo che essa assume l'aspetto di una equazione di bilancio ed esprime il fatto che la quantità $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{em} + \mathbf{P}_{mecc}$ associata alla regione dello spazio Ω può variare solo se vi è un flusso non nullo del tensore τ attraverso il bordo di Ω. E' pertanto spontaneo attribuire al campo vettoriale $\mathbf{G}_{em}$ il significato di densità di momento elettromagnetico (perchè il suo integrale è omogeneo al momento meccanico della particella) e al tensore degli sforzi elettromagnetici di Maxwell il significato di densità di flusso di momento.
In particolare, se il flusso di τ attraverso $\partial\Omega$ è nullo, $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{em} + \mathbf{P}_{mecc}$ non varia nel tempo e dunque si ha conservazione della quantità di moto totale per il sistema di cariche e campo elettromagnetico all'interno di Ω.
Torniamo al tensore degli sforzi di Maxwell; τ_{kl} è la densità di flusso della componente k del momento nella direzione l. Il tensore degli sforzi appare originariamente nella meccanica dei continui (elastici, in generale, o fluidi). Precisamente, in quella sede un oggetto analogo a τ_{kl} rappresenta la componente lungo $\mathbf{e}_k$ della forza per unità di superficie esercitata da una porzione del mezzo elastico su una porzione adiacente e separata da quella da un elemento di superficie con direzione $\mathbf{e}_l$. Poiché se $k = l$ la forza per unità di superficie e normale alla superficie si comporta come una pressione (o una tensione, dipendentemente dal verso), i termini τ_{kk} vengono detti pressioni; corrispondentemente, i termini fuori diagonale, τ_{kl}, vengono detti sforzi di taglio. In un fluido perfetto gli unici sforzi non nulli sono di pressione, cioè il fluido è perfetto se si può assumere che la forza per unità di superficie che si esercita in direzione diversa dalla normale alla superficie che separa due porzioni adiacenti di fluido sia nulla. In generale, si adotta una decomposizione del tensore degli sforzi in una parte a traccia nulla ed una parte di pura pressione, $\tau_{kl} = \tau^0_{kl} - p\delta_{kl}$, con p scelto in modo tale da rendere τ^0_{kl} a traccia nulla, ovvero $Tr(\tau_{kl}) = -3p$.

Nel caso elettromagnetico p viene detta pressione di radiazione, e ha l'espressione

$$3p = \frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \; ; \tag{1.38}$$

la pressione di radiazione risulta pertanto proporzionale alla densità di energia elettromagnetica. Ad esempio un fascio di luce che incida su una superficie materiale esercita su di esso una forza (sperimentalmente osservabile); la forza per unità di superficie interessata dal fascio risulta in effetti proporzionale al momento per unità di volume moltiplicato per c, secondo la relazione data. Occorre ancora insistere sui risultati fondamentali che sono stati ottenuti in questo paragrafo: una regione dello spazio in cui sia presente un campo elettromagnetico è sede di energia e quantità di moto ed il campo è in grado di trasportare queste quantità, potendole anche scambiare con la materia.
Si osservi, in vista di futuri sviluppi, che in assenza di materia l'equazione 1.32 è un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{G}_{em} \; + \; \nabla \cdot \tau \; = \; 0 \tag{1.39}$$

o anche per componenti

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{em,k} + \frac{\partial}{\partial x_l}\tau_{kl} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{1.40}$$

Se invece è presente materia, nella stessa equazione dovremo aggiungere la densità di forza di Lorentz.

1.2. **Formulazione variazionale dell'Elettrodinamica.** Consideriamo una particella di carica q e massa m sulla quale agisca un campo elettromagnetico *assegnato*. Come abbiamo visto, la sua dinamica è governata dall'equazione 1.15, e vogliamo ora mostrare che tale equazione è l'equazione di Eulero-Lagrange associata ad una opportuna azione di Hamilton. Come è già noto, l'azione della particella libera è data da

$$S_f = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2} \; dt$$

con corrispondente Lagrangiana $\mathscr{L}_f = -mc^2\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}$.
Il campo elettromagnetico $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ è determinato dai potenziali scalare e vettore $(\phi, \mathbf{A})$; in termini di questi ultimi, risulta che l'azione che riproduce le corrette equazioni della dinamica è:

$$S = S_f + S_i = \int_{t_1}^{t_2} [-mc^2\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2} + \frac{q}{c}(c\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})] \; dt \; , \tag{1.41}$$

così che la Lagrangiana del sistema è data da

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_i = -mc^2\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2} + \frac{q}{c}(c\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \; . \tag{1.42}$$

Nei testi di Meccanica Analitica il secondo addendo della lagrangiana di interazione $\mathscr{L}_i$ è chiamato tradizionalmente un potenziale dipendente dalla velocità. Come vedremo, passando alla descrizione relativistica la dipendenza dalla velocità riguarda in effetti anche il potenziale scalare.
La prova che le equazioni di Eulero-Lagrange per l'azione 1.41 coincidono con 1.15 consiste in una verifica diretta. Per comodità di scrittura ci si servirà della notazione, tipica dell'analisi vettoriale, che fa uso dell'operatore nabla ∇.
Calcoliamo separatamente le equazioni di Lagrange relative alla Lagrangiana libera e a quella di interazione.

Per quanto riguarda la parte libera si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}_f}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathscr{L}_f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v})$$

mentre la parte di interazione fornisce i termini

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \mathbf{x}} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - \frac{q}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

La derivata rispetto al tempo che compare nell'ultimo addendo produce, grazie al teorema di derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

e dunque

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \mathbf{x}} = -q(\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) + \frac{q}{c}\left[\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}\right]$$

Grazie all'identità vettoriale

$$\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

e tenendo conto delle espressioni dei campi in termini dei potenziali, si ha infine

$$q(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) + \frac{q}{c}\left[\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}\right] = q\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\wedge\mathbf{B}\right] = \mathbf{F}_L$$

ovvero, raccogliendo i risultati, si raggiunge la tesi

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = q\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\wedge\mathbf{B}\right] = \mathbf{F}_L\ . \tag{1.43}$$

Naturalmente, nota la formulazione lagrangiana della dinamica, è possibile passare alla formulazione Hamiltoniana nel modo usuale. Introdotto il momento coniugato alla posizione della particella,

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathscr{L} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2}} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$$

la funzione hamiltoniana risulta

$$\mathscr{H} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - \mathscr{L} = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2} + q\phi = \frac{mc^2}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2/c^2}} + q\phi$$

e in termini delle variabili canoniche (ovvero invertendo la relazione fra momento e velocità e sostituendo nella funzione hamiltoniana) si ottiene infine

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^2 + |\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}|^2} + q\phi\ .$$

2. Formulazione relativisticamente covariante delle equazioni di Maxwell

2.1. **Notazioni.** Nel seguito si adotta la notazione seguente, ad evitare ambiguità e inconsistenze: le coordinate del quadrivettore che individua un evento vengono indicate con

$$(x^\mu) = (x^0, x^i) = (ct, \mathbf{x}) \ .$$

Le coordinate di una particella materiale vengono indicate con (z^μ)

2.2. **Invarianza della carica ed equazione di continuità.** Prima di intraprendere la descrizione covariante dell'elettromagnetismo è necessario formulare una legge fondamentale di natura, che ne è alla base: l'invarianza di Lorentz della carica elettrica. Ogni riferimento di Lorentz attribuisce la stessa carica ad un fissato sistema fisico. Sulla base di questo principio è possibile introdurre il *quadrivettore corrente*, tramite la posizione

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{2.1}$$

Mostriamo che si tratta effettivamente di un quadrivettore.
E' opportuno preliminarmente ricordare che nelle equazioni di Maxwell *nel vuoto*, che stiamo qui trattando, non compaiono termini fenomenologici, ma solo oggetti fondamentali. In particolare le correnti sono correnti di convezione, ovvero associate allo spostamento fisico di cariche elettriche, e sono legate a queste ultime dalla relazione $\mathbf{j}(x,t) = \rho\mathbf{v}(x,t)$, dove $\mathbf{v}$ è il campo vettoriale delle velocità, ovvero la velocità della particella carica che si trova a passare in x al tempo t. Ad esempio nel caso rilevante di una carica *puntiforme* q che si muova lungo la curva $t \to \mathbf{z}(t)$ si ha

$$\rho(z,t) = q\delta_{\mathbf{z}(t)}, \qquad \mathbf{j} = q\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt}\delta_{\mathbf{z}(t)}$$

dove $\delta_{\mathbf{z}(t)}$ è la distribuzione di Dirac concentrata in $\mathbf{z}(t)$.
Prendendo un atteggiamento riduzionista, si può immaginare una sorgente distribuita tramite il passaggio al continuo a partire da un gran numero di sorgenti puntiformi come quella appena descritta. La questione tuttavia, sottile dal punto di vista concettuale, lo è anche dal punto di vista matematico e in questa sede si preferisce assumere la plausibilità dell'operazione senza pretendere di giustificarla. In ogni caso, consideriamo una regione elementare di volume $d^3\mathbf{x}$, all'interno della quale si trovi una carica dq, e seguiamone il movimento; come sappiamo, se $\mathbf{v}$ è la velocità di dq, il volume $d^3\mathbf{x}$ subisce la contrazione di Lorentz nella direzione del moto, e pertanto non è invariante; invece è invariante la quantità $\gamma(\mathbf{v})d^3\mathbf{x}$ (o, detto in altri termini, è invariante la misura 4-dimensionale $d^3\mathbf{x}dt$. Dimostrazione: lo Jacobiano di una traformazione di Lorentz ha modulo unitario e quindi una trasformazione di Lorentz conserva la misura di Lebesgue nello spazio di Minkowski $\mathbb{M}$).
Consideriamo ora la carica moltiplicata per la quadrivelocità $u^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau}$:

$$dq\ u^\mu = dq\ \frac{dz^\mu}{d\tau} = \rho\ \frac{dz^\mu}{d\tau}d^3\mathbf{x} = \rho\ \frac{dz^\mu}{dt}\gamma(\mathbf{v})d^3\mathbf{x} \ .$$

Il primo membro è un quadrivettore, perchè la carica è un invariante di Lorentz, e quindi tale deve essere il secondo membro. Poiché la quantità $\gamma(\mathbf{v})d^3\mathbf{x}$ come s'è detto è un invariante, il restante fattore $\rho\ \frac{dz^\mu}{dt}$ deve essere un quadrivettore. Ma le sue componenti coincidono esattamente con $(c\rho, \rho\mathbf{v}) = (j^\mu)$, e l'asserto è dimostrato.
Consideriamo ora l'equazione di continuità 1.4. E' a questo punto facile tradurla nel formalismo relativistico facendo uso dell'operatore differenziale

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\mathbf{x}})$$

L'equazione è evidentemente

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ . \tag{2.2}$$

Si tratta in effetti di una equazione covariante a vista. Infatti l'operatore differenziale ∂_μ si comporta come un covettore per trasformazione di riferimento lorentziano, mentre la 4-correntej^μ è un vettore, o meglio un campo vettoriale; pertanto il primo membro dell'equazione si presenta come la contrazione di un covettore ed un vettore, ossia uno scalare.
L'operazione di contrazione di ∂_μ con un campo vettoriale definisce la 4-divergenza del campo vettoriale. Per quanto detto, essa risulta uno scalare di Lorentz. A parole possiamo dunque esprimere sinteticamente l'equazione di conservazione della carica dicendo che la 4-divergenza della 4-corrente è nulla.

2.3. **Potenziali e Campi.** Introduciamo ora il quadrivettore 4-potenziale elettromagnetico, con componenti controvarianti

$$\mathcal{A}^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \ , \tag{2.3}$$

mentre le corrispondenti componenti covarianti (che sono le componenti di una 1-forma) sono

$$\mathcal{A}_\mu = g_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu = (\phi, -\mathbf{A}) \ . \tag{2.4}$$

Osserviamo che la condizione di Lorenz è Lorentz invariante: infatti essa si scrive come

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0 \ . \tag{2.5}$$

Come già è noto, nel gauge di Lorenz i potenziali scalare e vettore soddisfano l'equazione delle onde inomogenea, e come subito si controlla per il 4-potenziale si avrà corrispondentemente

$$\Box \mathcal{A}^\nu = \partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \ . \tag{2.6}$$

Osserviamo che nell'equazione precedente è stato scritto l'operatore di D'Alembert come la contrazione dell'operatore differenziale ∂_μ, che si comporta come un covettore per trasformazioni di Lorentz, con l'operatore differenziale ∂^μ, che si comporta invece come un vettore sotto un cambio di riferimento:

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu$$

Da questa semplice osservazione segue una conclusione di grande rilevanza, ovvero che *l'operatore di D'Alembert è uno scalare di Lorentz*: esso è invariante in forma al cambiare di riferimento lorentziano. In particolare, se il secondo membro dell'equazione (2.6) è un quadrivettore, e tale è la 4-corrente, e se i dati iniziali sono 4-vettori, la soluzione sarà un quadrivettore.
Come tradurre i legami fra 4-potenziali e campi dati dalle (1.5) e (1.6)? A tale scopo introduciamo il tensore doppio controvariante e antisimmetrico (talvolta detto di Faraday) del campo elettromagnetico, con componenti

$$\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu = F^{\mu\nu} \ ; \tag{2.7}$$

Ricordiamo che in questa definizione compaiono gli operatori (controvarianti) $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$, che in termini di coordinate relative ad un fissato riferimento di Lorentz si scrivono

$$\partial^\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla_{\mathbf{x}}) \ .$$

E' utile associare matrici a questi tensori, e facilmente si riconosce che valgono le identificazioni seguenti

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Ad esempio, consideriamo il termine di posto (0,1) della matrice. Si ha

$$\partial^0 \mathcal{A}^1 - \partial^1 \mathcal{A}^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^1 + \frac{\partial}{\partial x^1}\phi = -E_1$$

come deve essere. Analogamente, il termine di posto (1,3) è dato da

$$\partial^1 \mathcal{A}^3 - \partial^3 \mathcal{A}^1 = -\frac{\partial}{\partial x^1}\mathcal{A}^3 + \frac{\partial}{\partial x^3}\mathcal{A}^1 = -\frac{\partial}{\partial x^1}A^3 + \frac{\partial}{\partial x^3}A^1 = B_2 \ .$$

Il tensore doppio covariante corrispondente a $F^{\mu\nu}$ è definito da

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = F_{\mu\nu} \ . \tag{2.9}$$

e ha per componenti le entrate della matrice

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

In questo caso non c'è bisogno di verifica, ma solo di calcolo. Ricordiamo infatti che $F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\mu\sigma}F^{\rho\sigma}$. Analogamente il tensore di tipo $(1,1)$ associato a $F^{\mu\nu}$ ha componenti

$$F^\mu_\nu = F^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Si osservi che benché F^μ_ν siano le componenti di un tensore antisimmetrico rispetto alla metrica di Lorentz, la corrispondente matrice non è antisimmetrica, nel senso che non coincide con la propria trasposta.

Le relazioni che abbiamo introdotto tra il tensore di Faraday e il 4-potenziale del campo traducono le relazioni già note in ambito non relativistico tra campi elettrico e magnetico da una parte e potenziale scalare e vettore dall'altro. Il punto rilevante che va sottolineato è che le relazioni che intercorrono fra potenziali e campi consentono di concludere che questi ultimi, pur non avendo presi singolarmente proprietà di invarianza al variare del riferimento, concorrono a costruire un oggetto obiettivo, il tensore di Faraday, che non cambia al variare del sistema di riferimento. Cambiano naturalmente le sue componenti, oramai in maniera nota, e questo sarà oggetto degli esempi svolti nel prossimo paragrafo.

2.4. **Esempi di trasformazione di campi elettromagnetici.**

Esempio 1: Particella carica in moto uniforme.
Come primo esempio consideriamo il campo di una particella carica q in moto uniforme con velocità $\mathbf{v}$ lungo l'asse x^1 in un riferimento inerziale K, cioè Lorentziano, di coordinate (x^μ). Vogliamo determinarne i potenziali e i elettromagnetici. Poichè queste sono grandezze tensoriali, possiamo determinarle se sono note le corrispondenti grandezze in un altro riferimento inerziale. E' spontanea la scelta del riferimento $\overline{K}$ solidale con la particella e con origine nella stessa, nel quale il campo elettromagnetico è puramente elettrico, e precisamente coulombiano. Questa è una tipica applicazione del principio di relatività: è indifferente considerare la carica in quiete rispetto ad un osservatore in moto (qui $\overline{K}$) o la carica in moto rispetto ad un osservatore in quiete (qui K).
In $\overline{K}$, con ovvio significato dei simboli, si ha

$$\overline{\phi} = \frac{q}{\overline{r}} \qquad \overline{\mathbf{A}} = 0 \qquad \overline{r} = |\overline{\mathbf{x}}| \ ;$$

mentre per i campi:

$$\overline{\mathbf{E}} = q\frac{\overline{\mathbf{x}}}{\overline{r}^3} \qquad \overline{\mathbf{B}} = 0 \ .$$

La trasformazione di Lorentz che consente di passare da K a $\overline{K}$ è un boost lungo l'asse $x^1 \equiv \overline{x}^1$ di velocità v, la cui matrice rappresentativa è

$$\Lambda = \left(\Lambda^\nu_\mu\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Con questo si intende che si passa alle *coordinate* di un evento in K alle *coordinate* dello stesso evento in $\overline{K}$ tramite la legge

$$\overline{\mathbf{x}} = \Lambda \mathbf{x} \ ,$$

In termini della matrice del cambio di base così come è stata definita in appendice si ha $\Lambda = (A^{-1})^t$.
Per quanto riguarda il 4-potenziale la legge di trasformazione è

$$\mathcal{A} = \Lambda^{-1}\, \overline{\mathcal{A}}$$

da cui le componenti del campo vettoriale $\mathcal{A}^\nu = (\phi, \mathbf{A})$ risultano (qui si tiene conto del fatto che $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$)

$$\phi = \gamma\overline{\phi} \qquad \mathcal{A}^1 = A^1 = \beta\gamma\overline{\phi} = \beta\phi, \qquad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}^3 = 0$$

Le quantità in K vanno espresse in termini delle coordinate x^μ. Più esplicitamente, si ha

$$\mathcal{A}(x) = \Lambda^{-1}\, \overline{\mathcal{A}}(\overline{\mathbf{x}}) = \Lambda^{-1}\, \overline{\mathcal{A}}(\Lambda\mathbf{x}) \ .$$

A tale scopo è sufficiente osservare che

$$\overline{r} = \sqrt{(\overline{x}^1)^2 + (\overline{x}^2)^2 + (\overline{x}^3)^2} = \sqrt{\gamma^2(x^1 - vt)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

si ottiene infine

$$\phi = \frac{e\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}} \ ,$$
$$\mathbf{A} = \frac{e\gamma\mathbf{v}}{c\sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}} \ .$$

Veniamo ai campi elettromagnetici. Sarebbe naturalmente possibile dedurli dalle precedenti espressioni per i potenziali per derivazione, ma qui ci serviremo del fatto che il campo elettromagnetico ha natura tensoriale.
In termini del tensore di Faraday-Maxwell si ha in $\overline{K}$

$$\overline{F} = \left(\overline{F}_{\mu\nu}\right) = \frac{q}{4\pi\overline{r}^3}\begin{pmatrix} 0 & \overline{x}^1 & \overline{x}^2 & \overline{x}^3 \\ -\overline{x}^1 & 0 & 0 & 0 \\ -\overline{x}^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\overline{x}^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Per avere il campo elettromagnetico in K occorre trasformare il suddetto tensore mediante il boost Λ. La legge di trasformazione per un tensore doppio covariante è data dalla

$$F_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \overline{F}_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad F = \Lambda^T \overline{F} \Lambda$$

Esplicitamente si ottiene

$$F = \frac{q}{4\pi\overline{r}^3}\begin{pmatrix} 0 & \overline{x}^1 & \gamma\overline{x}^2 & \gamma\overline{x}^3 \\ -\overline{x}^1 & 0 & -\beta\gamma\overline{x}^2 & -\beta\gamma\overline{x}^3 \\ -\gamma\overline{x}^2 & \beta\gamma\overline{x}^2 & 0 & 0 \\ -\gamma\overline{x}^3 & \beta\gamma\overline{x}^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Per concludere il calcolo, si deve esprimere $F_{\rho\sigma}$ nelle coordinate di K tenendo presente che, come prima,

$$\overline{r} = \sqrt{(\overline{x}^1)^2+(\overline{x}^2)^2+(\overline{x}^3)^2} = \sqrt{\gamma^2(x^1-vt)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$$

$$\overline{x}^1 = \gamma(x^1-\beta ct) \ , \quad \overline{x}^2 = x^2 \ , \quad \overline{x}^3 = x^3 \ .$$

L'osservazione principale da fare è che nel riferimento K oltre ad un campo elettrico non nullo compare anche un campo magnetico, assente nel riferimento di quiete. Si noti che a questa conclusione si poteva già giungere considerando i 4-potenziali. Inoltre il campo magnetico, come facilmente si verifica tenendo conto di 2.12 e 2.8, è legato al campo elettrico dalla relazione

$$\mathbf{B} = \beta \wedge \mathbf{E}$$

Questa è una proprietà generale: se in un fissato riferimento il campo magnetico è nullo, nel riferimento legato da un boost di velocità $\mathbf{v}$ al primo la relazione fra campo elettrico e magnetico è data dalla equazione precedente. Analogamente, se in un riferimento il campo elettrico è nullo, effettuando un boost di velocità $\mathbf{v}$ il campo elettrico risulta non nullo ed è legato al campo magnetico dalla relazione

$$\mathbf{E} = -\beta \wedge \mathbf{B}$$

Queste proprietà si verificano facilmente a partire dalla legge di trasformazione del tensore di Faraday-Maxwell, operando come nel caso particolare appena visto.
Si trova che per un boost lungo l'asse $x^1 \equiv \overline{x}^1$ i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ si trasformano nel modo seguente

$$\overline{B}_1 = E_1 \ , \quad \overline{E}_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3) \ , \quad \overline{E}_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) \tag{2.15}$$

$$\overline{B}_1 = B_1 \ , \quad \overline{B}_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3) \ , \quad \overline{B}_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2) \tag{2.16}$$

Scriviamo i campi in termini delle componenti parallela ($\mathbf{E}_{||}$) e perpendicolare ($\mathbf{E}_\perp$) alla direzione del boost:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{||} + \mathbf{E}_\perp \ ;$$

Ne segue (verificarlo per esercizio)

$$\overline{\mathbf{E}}_{||} = \mathbf{E}_{||}, \quad \overline{\mathbf{E}}_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \beta \wedge \mathbf{B}) \tag{2.17}$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{||} = \mathbf{B}_{||}, \quad \overline{\mathbf{B}}_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \beta \wedge \mathbf{E}) \tag{2.18}$$

Da queste relazioni si dimostrano facilmente le proprietà citate.

Esercizio Si provi che le quantità $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ e $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2$ sono relativisticamente invarianti, ovvero che non dipendono dal riferimento lorentziano. (Suggerimento: gli autovalori di F_μ^ν sono invarianti).

Esercizio Si provi che se in un riferimento inerziale i campi elettrico e magnetico sono ortogonali ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$), esiste un riferimento inerziale in cui è nullo il campo elettrico se $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ o un riferimento inerziale in cui il campo magnetico è nullo se $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$.

Esempio 2. Invarianza della fase ed effetto Doppler
L'effetto Doppler consiste nel fatto che un'onda elettromagnetica monocromatica emessa da una sorgente in movimento con velocità $\mathbf{v}$ rispetto ad un riferimento inerziale, appare a quest'ultimo con una frequenza dipendente da $|\mathbf{v}|$ e dall'angolo tra $\mathbf{v}$ e la direzione di propagazione dell'onda.
Come sappiamo, le equazioni di Maxwell nel vuoto ammettono soluzioni particolari, dette onde piane. Ogni componente del campo elettrico o magnetico di un'onda piana ha la forma

$$f(t, x) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tag{2.19}$$

Le onde piane non hanno energia finita, come è immediato verificare, ma ogni soluzione di energia finita può essere scritta come combinazione lineare di onde piane, o più precisamente come integrale di Fourier di onde piane. Qui ignoriamo questo fatto e studiamo la singola onda piana. Possiamo riferirci al 4-potenziale del campo, che scriviamo sotto la forma

$$\mathcal{A}^\mu = a^\mu \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tag{2.20}$$

nella quale a^μ è un quadrivettore che fornisce *l'ampiezza*, mentre si dice *fase* l'argomento del coseno. Concorrono a definire la fase la pulsazione ω e il vettore d'onda $\mathbf{k}$; l'interpretazione di queste grandezze è nota.
Affinché il 4-potenziale 2.4 sia soluzione dell'equazione delle onde

$$\Box \mathcal{A}^\mu = 0$$

deve valere la relazione di dispersione

$$c|\mathbf{k}| = \omega \tag{2.21}$$

Inoltre, il gauge di Lorentz ($\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$) nel quale è valida l'equazione di d'Alembert per il 4-potenziale, impone l'ulteriore vincolo

$$a^0 \frac{\omega}{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{2.22}$$

dove si è posto $\mathbf{a} = (a^i)$.
Osserviamo ora che affinché $\mathcal{A}^\mu$ sia un quadrivettore, la fase deve essere uno scalare invariante.
Convinciamoci del fatto che la fase sia un invariante relativistico, ovvero che essa non dipende dal riferimento di Lorentz.
Per fissare le idee sia $\mathbf{n}$ il versore lungo cui propaga l'onda elettromagnetica piana in considerazione; il vettore d'onda è allora

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} = \frac{2\pi\nu}{c}\mathbf{n}$$

dove λ è la lunghezza d'onda.
Sia $t = 0$ l'istante nel quale una fissata cresta d'onda (un suo massimo) passa per l'origine della retta di direzione $\mathbf{n}$. Per raggiungere un punto qualunque del piano perpedicolare alla retta, e individuato dal punto di vettore $\mathbf{r}$ sulla retta, la cresta data impiega un tempo $\Delta t = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c$. Sia

$$T = t - \Delta t$$

il tempo trascorso dopo il passaggio della cresta di riferimento per il piano di riferimento. La quantità νT è il numero di creste passate per il piano considerato, e non dipende dal riferimento. Essendo la fase proporzionale a tale quantità, essa risulta uno scalare.
Per procedere introduciamo l'oggetto a quattro componenti $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ e scriviamo la fase sotto la forma

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} k^\nu x^\mu \tag{2.23}$$

Poichè la fase è uno scalare per ogni scelta del 4-vettore x^μ, l'ente appena introdotto k^μ deve essere un quadrivettore, che chiameremo quadrivettore d'onda. Dunque l'onda piana, scritta ora sotto la forma

$$\mathcal{A}^\mu = a^\mu \cos(k_\nu x^\nu) \tag{2.24}$$

è univocamente individuata dai due 4-vettori k^μ e a^μ; k^μ è un quadrivettore di tipo luce per la 2.21, mentre per la condizione di Lorentz 2.22 k^μ e x^μ sono ortogonali rispetto alla metrica di Minkowski in ogni riferimento inerziale.
Premesso questo, esaminiamo le conseguenze del fatto che k^μ è un quadrivettore: per un cambio di riferimento inerziale definito dalla trasformazione di Lorentz Λ_μ^ν esso si trasforma secondo la legge $k'^\mu = \Lambda^\mu_\nu k^\nu$.
Consideriamo due riferimenti inerziali, K' nel quale la sorgente è in quiete, e K nel quale la sorgente si muove con velocità $\mathbf{v}$. In K scegliamo il piano $x^1 - x^2$ come il piano generato da $\mathbf{v}$ e dalla direzione di propagazione dell'onda monocromatica piana emessa, direzione individuata dal vettore d'onda $\mathbf{k}$, con x^1 con la direzione di $\mathbf{v}$, e indichiamo con θ l'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{k}$; conseguentemente il 4-vettore associato all'onda piana in K è dato da

$$k^\mu = (|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}|\cos\theta, |\mathbf{k}|\sin\theta, 0) \ .$$

La frequenza dell'onda è data dalla relazione

$$\nu(\theta) = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{k}|$$

Nel riferimento K' collegato a K da un boost di velocità $\mathbf{v}$ lungo la direzione comune $x'^1 = x^1$ la sorgente è in quiete, e ad essa sono associati la frequenza propria ν_0 e il 4-vettore d'onda

$$k'^\mu = (|\mathbf{k}'|, |\mathbf{k}'| \cos\theta', |\mathbf{k}'| \sin\theta', 0)$$

Tramite la 2.12 si ricava al solito

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1), \quad k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0), \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = k^3 \tag{2.25}$$

e da queste si ricavano le relazioni

$$\nu_0 = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{k}'| = \frac{c}{2\pi} k'^0 = \nu(\theta)\gamma(1 - \beta\cos\theta) \ , \tag{2.26}$$

e

$$\nu_0 \sin\theta' = \nu \sin\theta \ . \tag{2.27}$$

Equivalentemente,

$$\nu(\theta) = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1 - \beta\cos\theta)} \ , \quad \sin\theta' = \frac{\nu(\theta)}{\nu_0} \sin\theta \tag{2.28}$$

La prima delle equazioni precedenti corrisponde all'effetto Doppler, che può essere descritto qualitativamente come una dilatazione relativistica del periodo dell'onda monocromatica. In particolare per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha la formula dell'effetto Doppler *trasversale*, nel quale il contributo relativistico del fattore γ, che introduce una correzione dell'ordine β^2 non è mascherato del contributo del fattore Doppler $(1 - \beta\cos\theta)^{-1}$ che è dell'ordine β, e quindi preponderante per angoli generici (e già noto classicamente).
La seconda delle 2.28 descrive invece *l'aberrazione* della luce, ben nota in astronomia, secondo cui la direzione di propagazione della radiazione elettromagnetica emessa da una sorgente in movimento rispetto ad un riferimento inerziale non è la stessa direzione della radiazione nel riferimento di quiete. Sia l'effetto Doppler trasversale che l'aberrazione della luce stellare hanno giocato un ruolo significativo nello sviluppo dell'Ottica, quindi dell'Elettrodinamica e da queste della teoria della Relatività.

Esempio 3. Filo rettilineo percorso da corrente
Consideriamo ora il caso di un filo rettilineo uniformemente carico con densità lineare di carica $\lambda_0(x^1)$ posto lungo l'asse x^1 di un riferimento inerziale. Come è noto dall'elettrostatica e magnetostatica elementari, in un riferimento solidale con il filo il campo magnetico è nullo, mentre si ha un campo elettrico a simmetria cilindrica diretto ortogonalmente all'asse x^1 di intensità

$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda_0}{2\pi r}$$

dove $r = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2}$ è la distanza dal filo.

Corrispondentemente il tensore di Faraday-Maxwell si scrive

$$F = (F_{\mu\nu}) = \frac{\lambda_0}{2\pi r^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Immaginiamo ora che il filo si muova con velocità costante $\mathbf{v}$ lungo l'asse x^1, e come nell'esempio precedente indichiamo con un apice ($'$) le coordinate solidali con il sistema. Si scriverà allora

$$F' = \left(F'_{\mu\nu}\right) = \frac{\lambda_0}{2\pi r'^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x'^2 & x'^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x'^2 & 0 & 0 & 0 \\ -x'^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

In questo caso si ha $r' = \sqrt{(x'^2)^2 + (x'^3)^2} = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2} = r$ perchè nel boost lungo l'asse x^1 le altre coordinate coordinate spaziali rimangono invariate (mentre è sempre $x'^1 = \gamma(x^1 - \beta ct)$). Effettuando esplicitamente il boost si ottiene pertanto

$$F = \frac{\lambda_0\gamma}{2\pi r^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & -\beta x^2 & -\beta x^3 \\ -x^2 & \beta x^2 & 0 & 0 \\ -x^3 & \beta x^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Notiamo che tenendo presente che vale la relazione $\gamma\lambda_0 = \lambda$ tra densità di carica relativa e densità di carica nel riferimento di quiete, è possibile definire una densità di 4-corrente j per il sistema, data da

$$j^\mu = \frac{\lambda_0}{c}(\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \frac{\lambda_0}{c}u^\mu$$

dove u^μ è la 4-velocità.

2.5. **Invarianti di Lorentz associati al tensore di Faraday.** Possiamo domandarci quali grandezze possiamo costruire usando solo il tensore di Faraday, che risultino invarianti per il gruppo di Lorentz. Si tratta di una domanda apparentemente astratta, ma no immotivata. La grandezza fisica fondamentale (osservabile, si direbbe in Meccanica quantistica) che descrive il sistema fisico dato dal campo elettromagnetico nel vuoto è il tensore di Faraday, e si vogliono determinare le osservabili ammissibili dal punto di vista della teoria della relatività, che dipendono nella loro forma esclusivamente dal tensore di Faraday. Un modo di procedere è suggerito dal fatto che è possibile scrivere il tensore di Faraday come un tensore di tipo $(1,1)$, ovvero una applicazione lineare, e che la risposta alla domanda posta è ben nota nell'ambito dell'Algebra Lineare: si determinino gli autovalori della matrice associata alla trasformazione lineare, e questi non dipendono dalla base, o equivalentemente nel nostro contesto, dall'osservatore. Il problema è dunque quello di determinare le radici del

polinomio caratteristico associato a

$$F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

ovvero le radici di

$$P(\lambda) = \det (F^\mu_\nu - \lambda\delta^\mu_\nu) = 0\ .$$

Un attimo di riflessione consente di concludere che si otterrebbe la stessa risposta calcolando le radici del polinomio

$$\tilde{P}(\lambda) = \det (F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu})$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico. Questo perché $F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}F^\rho_\nu$, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\delta^\rho_\nu$, $g_{\mu\rho}$ è invertibile e applicando il teorema di Binet si ha l'asserto. In questa seconda formulazione equivalente del problema si parla di invarianti della forma quadratica di componenti $F_{\mu\nu}$.
Effettuando il calcolo del determinante si trova facilmente

$$P(\lambda) = -\lambda^4 + (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}|^2)\lambda^2 + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$$

Ne segue che gli invarianti di $F_{\mu\nu}$ sono funzioni delle quantità $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}|^2$ e $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$, che pertanto sono gli unici scalari di Lorentz costruibili con il tensore del campo elettromagnetico.
Nota la risposta, è ora facile verificare che questi invarianti si scrivono in forma covariante come segue:

$$|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}|^2 \ = \ \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ , \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = -\det(F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\ .$$

dove $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è il il simbolo completamente antisimmetrico di Levi Civita. Ne segue che a rigore la quantità $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ è uno pseudoscalare, perché è invariante per il gruppo si Lorentz proprio, ma cambia segno per l'applicazione di una trasformazione di Lorentz di determinante negativo, come P o T, a causa della presenza di $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ nella sua rappresentazione.

2.6. **Dualità.** E' possibile descrivere il campo elettromagnetico attraverso un tensore differente, canonicamente legato al tensore di Faraday F. Consideriamo quest'ultimo come la 2-forma corrispondente, ovvero il tensore 2 volte covariante antisimmetrico di componenti $F_{\rho\sigma}$. Osserviamo che l'invariante pseudoscalare introdotto al termine del paragrafo precedente può anche scriversi sotto la forma alternativa

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 2 * F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\ ,$$

dove si è introdotto il cosiddetto duale $G^{\rho\sigma}$ del tensore elettromagnetico $F_{\rho\sigma}$, dato per definizione in componenti da

$$G^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\ . \tag{2.33}$$

A questo tensore si associa a sua volta il tensore due volte covariante che si ottiene abbassando entrambi gli indici, detto duale di Hodge del tensore dato:

$$*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

Il duale di Hodge $*F$ di F è un tensore due volte covariante antisimmetrico, come il tensore di partenza F. In termini matriciali si trova l'espressione

$$*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

nella quale si riconosce che $*F$ si ottiene da F rimpiazzando $\mathbf{E}$ con $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}$ con $-\mathbf{E}$. Da questo fatto viene anche la denominazione di dualità. Una espressione alternativa ed equivalente del duale di Hodge di F, la cui verifica è lasciata per esercizio, è

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \ . \tag{2.36}$$

2.7. **Equazioni di Maxwell in forma tensoriale.** Passiamo ora alla scrittura delle equazioni di Maxwell. Serviamoci ad esempio del tensore di componenti $F_{\mu\nu}$, cioè della 2-forma. Grazie all'antisimmetria di $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ è immediato verificare che risulta

$$\partial_\rho \ F_{\mu\nu} + \partial_\mu \ F_{\nu\rho} + \partial_\nu \ F_{\rho\mu} = 0 \ . \tag{2.37}$$

Nella precedente equazione ogni termine si ottiene dal precedente per permutazione ciclica degli indici che vi compaiono. E' chiaro anche che, per l'antisimmetria di $\mathcal{F}$, solo le equazioni con i tre indici distinti sono significative (cioè non si riducono a identità banali $0 = 0$). Ora, è facile intuire che, discendendo la definizione di $\mathcal{F}$ tramite i potenziali $\mathcal{A}$ dalla coppia omogenea delle equazioni di Maxwell, questa sia in qualche modo in relazione con l'identità 2.37. Infatti l'equazione 2.37 coincide con la coppia omogenea delle equazioni Maxwell. Verifichiamolo ad esempio sulla permutazione (1,2,3):

$$\partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} = -\frac{\partial B_1}{\partial x^1} - \frac{\partial B_3}{\partial x^3} - \frac{\partial B_2}{\partial x^2} = -\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \ .$$

Dunque questa componente della 2.37 è equivalente alla 1.2. Consideriamo ora la permutazione (012):

$$\partial_0 \ F_{12} + \partial_2 \ F_{01} + \partial_1 \ F_{20} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} - (\mathrm{rot}\ \mathbf{E})_3 = 0$$

In questo caso si ottiene la terza componente della 1.1, e analogamente si verifica l'identità con le altre componenti della 1.1.
E' possibile dare alla prima coppia delle equaioni di Maxwell una forma più compatta servendosi del duale di Hodge del tensore del campo elettromagnetico.
Infatti, si verifica facilmente che le equazioni omogenee 2.37 equivalgono a

$$\partial^\rho * F_{\rho\sigma} = 0 \ . \tag{2.38}$$

Questa formulazione, sebbene introduca un secondo oggetto geometrico associato al tensore di Faraday, ha il vantaggio di essere una equazione per un quadrivettore e di non contenere equazioni ridondanti.
Infine vi è anche una terza formulazione delle equazioni omogenee. Come è mostrato in appendice, il primo membro dell'equazione 2.37 è proporzionale alla derivata esterna di $\mathcal{F}$, e l'equazione è pertanto equivalente a $d\mathcal{F} = 0$, ovvero al fatto che la 2-forma del campo elettromagnetico è chiusa. Questo fatto è, come peraltro anche nella nostra verifica sulle componenti, una conseguenza della definizione

di $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$, dalla quale immediatamente $d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0$, grazie alla fondamentale proprietà del differenziale esterno $d^2 \equiv 0$.
Le equazioni di Maxwell contenenti le sorgenti si scrivono sotto la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \ , \tag{2.39}$$

Il primo membro è la 4-divergenza del tensore $F^{\mu\nu}$; esso si ottiene attraverso la contrazione di un indice di covarianza e un indice di controvarianza nel tensore di rango 3 $\partial_\rho F^{\mu\nu}$ e produce un quadrivettore. Questo quadrivettore, in accordo con le equazioni di Maxwell inomogenee, è proporzionale (secondo il fattore dipendente dalle unità di misura $\frac{4\pi}{c}$ al quadrivettore densità di corrente.
Si lascia per esercizio la verifica esplicita di questo fatto.
Controlliamo invece, come è stato fatto nel paragrafo precedente in coordinate relative, che le equazioni di Maxwell comportano la conservazione locale della carica, ovvero l'equazione di continuità. A tale scopo, consideriamo le 2.39 e prendiamone la quadridivergenza sull'indice rimasto insaturo. Si ottiene

$$\partial_\nu \partial_\mu \ F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu \ ,$$

Ma il primo membro è identicamente nullo, perché somma di termini opposti due a due per l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$, e l'asserto è provato.
Infine la condizione di Lorenz si scrive nel linguaggio covariante come $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$, e dall'identità

$$\frac{4\pi}{c} j^\nu = \partial_\mu \ F^{\mu\nu} = (\partial_\mu \partial^\mu)\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu \mathcal{A}^\mu)$$

segue che nel gauge di Lorenz valgono le equazioni delle onde inomogenee per il 4-potenziale $\mathcal{A}^\mu$

$$\Box \mathcal{A}^\nu = \partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \ . \tag{2.40}$$

Osserviamo che essendo l'operatore D'Alembertiano un operatore invariante di Lorentz, l'equazione scritta è covariante a vista e in particolare, (come deve essere) se il suo secondo membro è un quadrivettore, sono quadrivettori anche le sue soluzioni.

2.8. **Dinamica relativistica di una particella carica: forza di Lorentz e formulazione variazionale.** Passiamo ora alla dinamica di una particella carica. Ci aspettiamo una generalizzazione covariante della legge di Newton sotto la forma

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \tag{2.41}$$

Il primo membro dell'equazione, la derivata rispetto al tempo proprio del 4-momento $p^\mu = m\frac{dv^\mu}{d\tau}$ è un quadrivettore di tipo spazio (perché $p^\mu p_\mu = m^2c^2$, e derivando si ottiene che $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ è ortogonale nel senso del prodotto scalare di Minkowski al quadrivettore di tipo tempo p^μ), e pertanto deve essere di tipo spazio anche la 4-forza K^μ. Questo implica che la componente temporale della 4-forza sia determinata dalla componente spaziale:

$$p_\mu K^\mu = 0 = p^0 K^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{K} \Rightarrow K^0 = \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{K} \tag{2.42}$$

Un quadrivettore K^μ che soddisfi questa condizione si dice 4-forza di Minkowski. Si osservi che necessariamente essa dipende dalla velocità. Poniamoci il problema di costruire una 4-forza di Minkowski, e per delimitare la ricerca, consideriamo 4-vettori con una dipendenza lineare dalla

velocità. Questa richiesta non è eccessivamente restrittiva, se si considera che anche in ambito classico le forze generalizzate compatibili con il formalismo lagrangiano o variazionale hanno una dipendenza al più lineare dalla velocità. Poichè la 4-velocità e la 4-accelerazione sono 4-vettori, allora la 4-forza di Minkowski deve essere rappresentata per ogni punto fissato di $\mathbb{M}$ da un tensore di tipo $(1,1)$, ovvero una trasformazione lineare da $\mathbb{M}$ in se stesso, le cui componenti indichiamo con $\tilde{F}^{\mu}_{\nu}(x)$. Si avrà

$$K^{\mu}(z,u) = \tilde{F}^{\mu}_{\nu}(z)u^{\nu} \tag{2.43}$$

Il campo tensoriale $\tilde{F}^{\mu}_{\nu}(x)$ deve essere tale che valga la 2.42, ovvero (omettendo la dipendenza del campo dalle variabili di spaziotempo)

$$\langle K,u\rangle = g_{\lambda\mu}\tilde{F}^{\mu}_{\nu}u^{\nu}u^{\lambda} = \tilde{F}_{\lambda\nu}u^{\lambda}u^{\nu} = 0 \quad , \tag{2.44}$$

nella quale è stato introdotto il campo tensoriale due volte covariante $\tilde{F}_{\lambda\nu}(x)$ associato dalla metrica a $\tilde{F}^{\lambda}_{\nu}(x)$. L'equazione precedente deve essere vera per ogni 4-velocità di tipo tempo.
Questo comporta che $F_{\lambda\nu}$ debba essere un tensore antisimmetrico, ovvero $\tilde{F}_{\lambda\nu} = -\tilde{F}_{\nu\lambda}$, o in linguaggio intrinseco, che sia $\tilde{F}(u,v) = -\tilde{F}(v,u)$.
Infatti la forma quadratica associata alla forma bilineare $\tilde{F}$, $\tilde{F}(u,u)$, è un polinomio di grado 2 nelle componenti della 4-velocità u, ed essendo nulla sull'aperto in $\mathbb{M}$ individuato dai vettori di tipo tempo, deve essere nulla ovunque. Infine per polarizzazione (cioè ricostruendo la forma bilineare dalla sua forma quadratica) si ha

$$\tilde{F}(u,v) + \tilde{F}(v,u) = \frac{1}{2}[\tilde{F}(u+v,u+v) + \tilde{F}(u-v,u-v)] = 0$$

e dunque l'antisimmetria

$$\tilde{F}(u,v) = -\tilde{F}(v,u) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{F}_{\lambda\nu} = -\tilde{F}_{\nu\lambda} \ . \tag{2.45}$$

Dunque ogni quadriforza di Minkowski lineare nella 4-velocità è descritta in un riferimento arbitrario dal tensore due volte covariante e antisimmetrico, ovvero da una 2-forma, le cui componenti sono necessariamente

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ -X_1 & 0 & -Y_3 & Y_2 \\ -X_2 & Y_3 & 0 & -Y_1 \\ -X_3 & -Y_2 & Y_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

per una opportuna scelta di $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$.
Per ottenere la forza di Lorentz poniamo

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{q}{c}F_{\mu\nu} = \frac{q}{c}\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

e corrispondentemente, alzando un indice,

$$\tilde{F}^{\mu}_{\nu} = \frac{q}{c} F^{\mu}_{\nu} = \frac{q}{c} \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Una verifica diretta mostra che

$$q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B})^i = \frac{q}{c} \gamma^{-1} F^i_{\nu}(z) u^{\nu} \tag{2.49}$$

Ne segue che in coordinate relative una particella carica soddisfa le equazioni differenziali

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}), \tag{2.50}$$

che differiscono dalle corrispondenti equazioni classiche per la presenza del momento relativistico (o del fattore γ) sotto la derivata temporale a primo membro.
Allo stesso modo, l'equazione della potenza assume la forma

$$\frac{d}{dt}p^0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{q}{c}\gamma^{-1} F^0_{\nu}(z) u^{\nu} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \ . \tag{2.51}$$

Per riassumere, le 2.50 e 2.51 definiscono la dinamica di una particella carica sotto l'azione di un campo elettromagnetico e sono compendiate dalla equazione a carattere tensoriale, e quindi vera in ogni riferimento Lorentziano

$$m\frac{d^2 z^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu}(z) u_{\nu} \ . \tag{2.52}$$

o equivalentemente

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu}(z) u_{\nu} \ . \tag{2.53}$$

Ottenute le equazioni della dinamica di una particella carica in forma covariante, mostriamo che esse sono le equazioni di Eulero-Lagrange di una azione di Hamilton covariante.
Abbiamo già scritto l'azione di Hamilton in coordinate relative ad un riferimento fissato, azione data dalla 1.41 che qui richiamiamo per comodità:

$$S = S_f + S_i = \int_{t_1}^{t_2} [-mc^2\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}]dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{q}{c}(c\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \ dt \ ,$$

Per quanto riguarda il termine di particella libera, esso è evidentemente un invariante relativistico, perchè a meno di una costante moltiplicativa coincide con il tempo proprio di una traiettoria nello spazio di Minkowski. Inoltre, è immediato riconoscere una forma covariante anche per il termine di interazione della Lagrangiana; si ha infatti

$$(c\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \ dt = (\gamma c\phi - \gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}dt = \mathcal{A}_{\mu} v^{\mu} \ d\tau \ ,$$

e dunque possiamo scrivere per l'azione covariante l'espressione

$$S = S_f + S_i = \int_{(t_1,\mathbf{x}_1)}^{(t_2,\mathbf{x}_2)} (-mc^2 - \frac{q}{c}\mathcal{A}_{\mu} v^{\mu} \ )d\tau \ , \tag{2.54}$$

che va interpretato come un integrale curvilineo su un cammino nello spaziotempo di estremi $(t_1, \mathbf{x}_1)$ e $(t_2, \mathbf{x}_2)$. Tra tutti i cammini nello spazio di Minkowski che hanno tali punti per estremi, i moti naturali, cioè le soluzioni dell'equazione 2.52 sono quelli che rendono stazionaria l'azione S.

2.9. **Formulazione variazionale delle equazioni di Maxwell.** Come abbiamo visto al termine del precedente paragrafo, le equazioni di movimento di una particella carica in un campo elettromagnetico dato hanno carattere variazionale, sono cioè le equazioni di stazionarietà di un opportuno funzionale di azione. Mostriamo che hanno carattere variazionale anche le equazioni di Maxwell. Osserviamo, per cominciare, che le equazioni di Maxwell sono equazioni e derivate parziali e non equazioni differenziali ordinarie, e quindi occorrerà ampliare il quadro descrittivo del formalismo lagrangiano con il quale siamo familiari. In particolare, non possiamo attenderci che l'azione sia un integrale sulle traiettorie di qualche densità lagrangiana funzione del parametro della traiettoria. Questo perché la teoria deve essere Lorentz invariante, e le traiettorie nello spazio dei campi sono famiglie di campi (scalari, vettoriali, tensoriali a seconda del caso...) parametrizzate dal punto o evento nello spazio tempo. Quindi è naturale attendersi che l'azione sia un integrale 4-dimensionale di una densità lagrangiana dipendente dai campi e dalle loro derivate, così come nel caso della particella si aveva un integrale curvilineo (tipicamente rispetto al tempo proprio) di una densità lagrangiana funzione delle coordinate della linea di universo della particella e delle loro derivate.
Il caso più semplice di formulazione variazionale di una teoria di campo sarebbe certamente quello di un campo scalare, ad esempio il campo di Klein-Gordon (che descrive particelle elementari dette mesoni); o un campo che descriva le oscillazioni di una corda o una membrana vibrante, per rimanere in ambito classico, e che quindi soddisfi l'equazione delle onde. Tralasciando per brevità questi esempi preliminari passiamo direttamente al campo elettromagnetico, benché esso presenti qualche complicazione concettuale e tecnica. Per ragioni che risiedono soprattutto negli sviluppi che conducono alla quantizzazione della teoria, è innanzitutto preferibile scegliere come variabili primitive della teoria non i campi ma i potenziali elettromagnetici.
Supporremo dunque che le variabili lagrangiane della teoria siano le componenti del 4-potenziale vettore $\mathcal{A}_\mu$. Si assumerà che i campi siano legati ai potenziali dalla relazione $\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu = F^{\mu\nu}$. Sappiamo già che questa ipotesi da sola garantisce che le equazioni di Maxwell omogenee siano delle identità. Dobbiamo dunque in realtà dedurre solo le equazioni di Maxwell inomogenee, in presenza di densità di cariche e correnti, di 4-corrente equivalentemente, che supporremo note. Per le considerazioni dette scriveremo l'azione sotto la forma

$$S(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(\mathcal{A}^\mu, \partial \mathcal{A}^\mu, j^\mu)\ d^4x$$

dove è stato omesso per semplicità l'indice di derivazione. Notiamo inoltre che implicitamente si sta assumendo che l'integrale esista, e che quindi i campi decadano quanto basta rispetto alle variabili di spazio tempo.
Naturalmente questa azione, finché rimane impregiudicata la forma della densità di lagrangiana $\mathcal{L}$, non descrive il campo elettromagnetico, ma una qualunque teoria caratterizzata da un campo vettoriale sullo spazio di Minkowski. Dovremo dunque fare delle ipotesi sulla densità di Lagrangiana. Richieste generali pressoché obbligate sono allora che $\mathcal{L}$ sia Lorentz invariante (ricordiamo che d^4x è un invariante di Lorentz) e che dia luogo ad equazioni lineari nei campi $F^{\mu\nu}$, perché tali sono le equazioni di Maxwell. Inoltre è ragionevole supporre che sia possibile decomporre l'azione in un termine di campo libero contenente solo i campi e in un termine di interazione contenente anche la quadricorrente, perché in assenza di sorgenti si dovranno ottenere le equazioni di Maxwell omogenee

dalla sola considerazione del primo:

$$S(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}_f(\mathcal{A}^\mu, \partial\mathcal{A}^\mu)\ d^4x + \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}_i(\mathcal{A}^\mu, \partial\mathcal{A}^\mu, j^\mu)\ d^4x \ = \ S_f(\mathcal{A}) + S_i(\mathcal{A})$$

o, in termini di densità di Lagrangiana,

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}^\mu, \partial\mathcal{A}^\mu, j^\mu) \ = \ \mathcal{L}_f(\mathcal{A}^\mu, \partial\mathcal{A}^\mu) + \mathcal{L}_i(\mathcal{A}^\mu, \partial\mathcal{A}^\mu, j^\mu)$$

Il termine di interazione S_i sarà responsabile della presenza della quadricorrente nelle equazioni di Maxwell inomogenee, e quindi sulla scorta dell'esempio della particella puntiforme trattato nel paragrafo precedente, procedendo per analogia lo scriveremo sotto la forma

$$S_i(\mathcal{A}) = -\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^4} \ \mathcal{A}_\mu j^\mu \ d^4x$$

In effetti questo integrale si riduce a quello già considerato se la densità di 4-corrente è quella di una particella puntiforme.
Passiamo ora ad occuparci della densità di lagrangiana di campo. Essa deve essere Lorentz invariante. Abbiamo gia discusso quali forme può avere uno scalare di Lorentz costruito solamente con i campi $F^{\mu\nu}$. Optiamo dunque per una densità di lagrangiana funzione dell'invariante $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Poiché come detto le equazioni debbono essere lineari, consideriamo una densità di lagrangiana quadratica:

$$S_f(\mathcal{A}) = \kappa\int_{\mathbb{R}^4} \ F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\ d^4x$$

dove ci teniamo la libertà di aggiustare il valore di κ e dove rimarchiamo ancora che l'integrando va pensato come una funzione di $\mathcal{A}^m u$.
Si tratta ora di verificare che la densità di lagrangiana scelta fornisce proprio le equazioni di Maxwell inomogenee. A tale scopo, imitando il procedimento di derivazione delle equazioni di Eulero Lagrange seguito nel caso di una particella, definiamo una variazione del potenziale $\mathcal{A}$. Questa è data in componenti da

$$\mathcal{A}^\mu + \epsilon\xi^\mu \ , \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

dove le ξ^μ sono componenti di un quadrivettore ξ e $\xi^\mu \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)$.
Fissando $\mathcal{A}$ ed ξ e lasciando variare ϵ, possiamo interpretare la variazione come una retta nello spazio dei campi con origine in $\mathcal{A}$ e direzione ξ. Per analogia con il caso finito dimensionale, diremo allora che il funzionale S ha derivata direzionale lungo la direzione ξ nel punto $\mathcal{A}$ se esiste il limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ \frac{1}{\epsilon}[S(\mathcal{A}^\mu + \epsilon h^\mu) - S(\mathcal{A}^\mu)] := \mathrm{D}_\xi S(\mathcal{A})$$

Diremo allora che $\mathcal{A}$ è un punto di stazionarietà per il funzionale S se

$$\mathrm{D}_\xi S(\mathcal{A}) \ = \ 0 \quad \forall\ \xi \in \ \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^4)\ .$$

Scriviamo allora

$$\frac{1}{\epsilon}[S(\mathcal{A}^\mu + \epsilon h^\mu) - S(\mathcal{A}^\mu)] = \int_{\mathbb{R}^4}\left[2\kappa F^{\mu\nu}(\partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu) - \frac{1}{c}\xi_\nu j^\nu\right] d^4x + \mathrm{O}(\epsilon)$$

e dunque, osservando che $F^{\mu\nu}\partial_\nu\xi_\mu = F^{\nu\mu}\partial_\mu\xi_\nu = -F^{\mu\nu}\partial_\mu\xi_\nu$,

$$\mathrm{D}_\xi S(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^4}\left[2\kappa F^{\mu\nu}(\partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu) - \frac{1}{c}\xi_\nu j^\nu\right] d^4x = \int_{\mathbb{R}^4}\left[4\kappa F^{\mu\nu}\partial_\mu\xi_\nu - \frac{1}{c}\xi_\nu j^\nu\right] d^4x$$

Infine integrando per parti e tenendo conto del fatto che i termini di bordo svaniscono perché $\xi^\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$,

$$D_\xi S(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^4} \left[-4\kappa \partial_\mu F^{\mu\nu} \xi_\nu - \frac{1}{c} \xi_\nu j^\nu \right] d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} \left[-4\kappa \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\nu \right] \xi_\nu d^4x$$

La condizione di stazionarietà è dunque

$$D_\xi S(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^4} \left[-4\kappa \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\nu \right] \xi_\nu d^4x \ 0 \quad \forall \xi_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$$

ma questo è vero se e solo se

$$-4\kappa \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\nu \ = \ 0 \ .$$

Pertanto si ottengono le equazioni di Maxwell inomogenee se si sceglie $\kappa = -\frac{1}{16\pi}$. La densità di Lagrangiana associata al campo di Maxwell è dunque

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}, j) = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} \mathcal{A}_\mu j^\mu \ .$$

Come ultima osservazione, notiamo che nell'azione $S(\mathcal{A}, j) = \int_{\mathbb{R}^4} \ \mathcal{L}(\mathcal{A}, j) \ d^4x$ il termine di campo libero è invariante di gauge a vista, perché funzione dei campi. Il termine di interazione invece dipende dai potenziali e a priori dipende dal gauge. Esplicitamente, se si esegue una trasformazione di gauge con funzione di gauge χ, compare nel termine di interazione dell'azione l'addendo supplementare $-\int_{\mathbb{R}^4} \partial_\mu \chi j^\mu \ d^4x$. D'altra parte si ha, integrando per parti e se la funzione di gauge si annulla all'infinito nello spazio tempo in modo da sopprimere i termini di bordo,

$$-\int_{\mathbb{R}^4} \partial_\mu \chi j^\mu \ d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} \chi \partial_\mu j^\mu \ d^4x = 0 \quad \text{se} \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

Dunque se la carica si conserva, l'azione è invariante di gauge. Poiché la stessa uguaglianza vale per qualunque scelta di funzione di gauge, che è una arbitaraia soluzione dell'equazione delle onde, si può provare che vale anche il viceversa: se S è gauge invariante allora deve conservarsi la carica. Dunque l'nvarianza di gauge della teoria è equivalente alla legge di conservazione della carica elettrica.

2.10. **Le leggi di conservazione e il tensore energia-momento del campo elettromagnetico.** Abbiamo già discusso tramite il formalismo non relativistico i concetti di energia e quantità di moto del campo elettromagnetico, nonchè la forma delle leggi di bilancio per l'energia e la quantità di moto totali associate ad un sistema di cariche e campo elettromagnetico interagenti. Veniamo ora alla descrizione covariante degli stessi concetti e risultati. Come si è visto trattando della legge di bilancio della quantità di moto, il punto fondamentale della costruzione del tensore energia-momento consiste nella possibilità di scrivere la densità di forza di Lorentz come la divergenza di un tensore. Questa operazione è possibile anche nel caso relativistico, dove anzi essa si presenta sotto una forma naturale ed unificante. Dimostriamo dunque che esiste un tensore (di Lorentz) di rango due e simmetrico, $T^{\mu\nu}_{elm}$ tale che valga

$$\frac{1}{c} F^\mu_{\ \rho} j^\rho = -\frac{\partial T^{\mu\rho}_{elm}}{\partial x^\rho} \ . \tag{2.55}$$

Come nel caso non relativistico, si riscrive il primo membro esprimendo la densità j^ν in termini dei campi facendo uso delle equazioni di Maxwell. Si ha

$$\tfrac{1}{c}F^{\mu}_{\rho}j^{\rho} = \tfrac{1}{4\pi}(\partial_\sigma F^{\rho\sigma})F^{\mu}_{\rho} = \tfrac{1}{4\pi}\partial_\sigma(F^{\rho\sigma}F^{\mu}_{\rho}) - \tfrac{1}{4\pi}F^{\rho\sigma}\partial_\sigma F^{\mu}_{\rho}$$
$$\tfrac{1}{4\pi}\partial_\sigma(F^{\rho\sigma}F^{\mu}_{\rho}) - \tfrac{1}{4\pi}F^{\rho\sigma}\partial_\sigma(F_{\rho\lambda}g^{\lambda\mu})$$

Riscriviamo l'ultimo termine:

$$\begin{aligned} F^{\rho\sigma}\partial_\sigma F_{\rho\lambda} &= \frac{1}{2}(F^{\rho\sigma}\partial_\sigma F_{\rho\lambda} + F^{\sigma\rho}\partial_\rho F_{\sigma\lambda}) = \frac{1}{2}F^{\rho\sigma}(\partial_\sigma F_{\rho\lambda} - \partial_\rho F_{\sigma\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}F^{\rho\sigma}(\partial_\sigma F_{\rho\lambda} + \partial_\rho F_{\lambda\sigma}) = \frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\partial_\lambda F_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}\partial_\lambda(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) \end{aligned}$$

Le identità precedenti si spiegano nel modo seguente: nel primo passaggio semplicemente si cambia nome agli indici saturati; nel secondo si sfrutta l'antisimmetria del tensore di Maxwell, così come nel terzo; nel quarto si usano le equazioni omogenee di Maxwell, e infine il quinto passaggio è la proprietà di Leibnitz della derivata.
Poiché nello spazio di Minkowski il tensore metrico g non dipende dalle coordinate spaziali, si ottiene

$$\frac{1}{c}F^{\mu}_{\rho}j^{\rho} = \frac{1}{4\pi}\partial_\sigma(F^{\rho\sigma}F^{\mu}_{\rho}) - \frac{1}{16\pi}\partial_\lambda(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}g^{\lambda\mu}) \tag{2.56}$$

Infine gli indici λ e σ sono contratti, dunque muti, e possiamo scambiarli senza alterare le somme precedenti, e si ottiene

$$\frac{1}{c}F^{\mu}_{\rho}j^{\rho} = \partial_\sigma[\frac{1}{4\pi}F^{\rho\sigma}F^{\mu}_{\rho} - \frac{1}{16\pi}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}g^{\sigma\mu}] \tag{2.57}$$

Abbiamo così identificato il tensore $T^{\mu\nu}_{elm}$ la cui divergenza cambiata di segno coincide con la densità di 4-forza:

$$T^{\mu\nu}_{elm} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\sigma} + \frac{1}{4}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\right] \tag{2.58}$$

Mostriamo ora come sia possibile descrivere in forma compatta la dinamica di un continuo relativistico carico tramite il tensore energia-momento. Dobbiamo assegnare un tensore energia momento anche alla materia. A differenza del caso del campo elettromagnetico, che è descritto da una teoria fondamentale con sue proprie equazioni, per trattare la materia occorre sceglierne un modello, perché in ambito macroscopico, che è quello nel quale qui ci si pone, non si dispone di una teoria fondamentale che la descriva. Ogni modello sarà caratterizzato da un suo proprio tensore energia-momento, che quindi eredita le ipotesi di natura fenomenologica su cui è basato il modello medesimo. Descriviamo per cominciare il modello più semplice, detto di *materia carica disgregata* o anche *polvere carica*.
Ad ogni elemento di fluido sono associate due caratteristiche invarianti, la massa e la carica, che nel riferimento di quiete denoteremo con Δm e Δq. Alla massa per ipotesi sono associati solo moti convettivi, descritti da una corrente materiale del tipo

$$j^{\mu}_{m} = \rho^{(0)}_{m}u^{\mu}(x) \tag{2.59}$$

dove è stato introdotto il campo di 4-velocità che assegna ad ogni evento dello spazio di Minkowski la 4-velocità del fluido in corrispondenza quell'evento, e $\rho^{(0)}_{m}$ è la densità di massa nel riferimento di quiete del fluido. Supporremo anche che la 4-corrente j^{μ}_{m} di fluido soddisfi un'equazione di continuità, ossia che valga

$$\partial_\mu j^{\mu}_{m} = 0 \tag{2.60}$$

L'elemento di fluido sarà soggetto alla forza di Lorentz, o meglio alla 4-forza di Minkowski, sicché la sua equazione dinamica risulterà

$$\Delta m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{\Delta q}{c} F^\mu_\nu(z) u^\nu \ . \tag{2.61}$$

Dividendo per il volume $\Delta\Omega^0$ misurato nel riferimento in quiete, si ottiene

$$\rho_m^{(0)} \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{\rho_e^{(0)}}{c} F^\mu_\nu(z) u^\nu = \frac{1}{c} j^\nu F^\mu_\nu(z) \ . \tag{2.62}$$

Osserviamo ora che, tenendo conto del fatto che la velocità è un campo di velocità dipendente dalla posizione, si avrà

$$\frac{du^\mu(x(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu(x(\tau)) \ , \tag{2.63}$$

e quindi l'equazione della dinamica si può riscrivere come

$$\rho_m^{(0)}(x) \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu(x(\tau)) = \frac{1}{c} j^\nu F^\mu_\nu(z) \ . \tag{2.64}$$

Infine, grazie alla dfinizione della corrente e alla equazione di continuità possiamo scrivere

$$\partial_\nu \left(\rho_m^{(0)}(x) u^\mu u^\nu(x) \right) = \frac{1}{c} j^\nu F^\mu_\nu(z) \ , \tag{2.65}$$

o anche,

$$\partial_\nu T_m^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu F^\mu_\nu(z) \ . \tag{2.66}$$

Nella precedente è stato posto per definizione

$$T_m^{\mu\nu}(x) = \rho_m^{(0)}(x) u^\mu(x) u^\nu(x) \ . \tag{2.67}$$

L'oggetto così definito è un tensore doppio controvariante, che chiameremo tensore energia momento della materia. La sua componente T_m^{00} è la densità di energia del continuo materiale, mentre le quantità cT_m^{0k} si interpreta come la corrente di energia prodotta dal movimento della materia che costituisce il continuo.
Se ora confrontiamo le equazioni 2.66 e e definiamo il tensore energia momento totale $T^{\mu\nu}(x)$

$$T^{\mu\nu}(x) = T_m^{\mu\nu}(x) + T_{elm}^{\mu\nu}(x) \ , \tag{2.68}$$

segue l'equazione di continuità

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.69}$$

che implica la conservazione dell'energia e del momento totali del sistema costituito da materia e campo elettromagnetico.

3. Appendice

Calcolo tensoriale in uno spazio affine

3.1. **Tensori su uno spazio vettoriale.** Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, si dice tensore di tipo (k,l) su V una mappa multilineare

$$\mathsf{T}:\ \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{\text{k volte}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{\text{l volte}} \longrightarrow \mathbb{R}\ . \tag{3.1}$$

L'insieme dei tensori di tipo (k,l) si indica con $\mathscr{T}(k,l)$; convenzionalmente si pone $\mathscr{T}(0,0) = \mathbb{K}$. Nel seguito sarà sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Un tensore è dunque una funzione che ad una stringa costituita di $k+l$ elementi, di cui k covettori e di l vettori, fa corrispondere un numero reale; la multilinearità significa che se si fissano tutti i vettori e covettori tranne uno (vettore o covettore, ma uno solo), la mappa ridotta che così si ottiene è lineare come funzione dell'elemento lasciato libero.
Si dice grado del tensore il numero intero $k+l$.
Vediamo subito gli esempi principali.
L'esempio più semplice è quello di un tensore di tipo $(0,0)$, che si riduce ad un elemento del campo degli scalari, nella fattispecie $\mathbb{R}$.
Un tensore di tipo $(0,1)$ è un covettore. E' infatti una mappa lineare

$$\mathsf{T}:\ V \longrightarrow \mathbb{R}$$

ovvero un funzionale lineare su V.
Consideriamo un tensore di tipo $(1,0)$; secondo la definizione questa è una mappa lineare

$$\mathsf{T}:\ V^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ,$$

Ora questo è un funzionale lineare su V^*, che è quanto dire un elemento di V^{**}, il cosiddetto biduale di V. Ma come è ben noto, in dimensione finita vi è un isomorfismo canonico fra V e V^{**} dato dalla mappa di valutazione $V \ni v \mapsto e(v) \in V^{**}$,

$$[e(v)](\alpha) = \alpha(v), \qquad \alpha \in V^*$$

e pertanto gli spazi vettoriali V e V^{**} possono venire identificati. I tensori di tipo $(1,0)$ sono dunque i vettori.
I tensori di tipo $(0,2)$ sono mappe

$$\mathsf{T}:\ V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

lineari in ciascun argomento, dunque forme bilineari.
Ad esempio un prodotto scalare è una forma bilineare e pertanto risulta un tensore di tipo $(0,2)$, detto qualche volta tensore metrico.
Un tensore di tipo $(1,1)$ è una mappa

$$\mathsf{T}:\ V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

lineare nei due argomenti. Per capire di che tipo di mappa si tratta, fissiamo una delle entrate, diciamo $v \in V$. A questo punto la mappa $\mathsf{T}(\cdot, v):\ V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ è un elemento del biduale di V, V^{**}, e dunque è (identificabile con) un vettore. Tale vettore dipende linearmente da v, perchè lineare è la dipendenza originaria di T; un tensore di tipo $(1,1)$ manda in modo lineare vettori di V in vettori

di V, ed una mappa con questa azione è un operatore lineare su V. In modo più formale si ha un isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari di V in se stesso, End(V), e lo spazio dei tensori di tipo $(1,1)$, $\mathscr{T}(1,1)$, dato dall'associazione End(V) $\ni \hat{T} \mapsto T \in \mathscr{T}(1,1)$ dove

$$\mathsf{T}(\alpha, v) = \alpha(\hat{T})(v), \qquad \alpha \in V^*, v \in V \ .$$

Analogamente lo stesso tensore può essere considerato anche come un operatore lineare su V^*.
I tensori di tipo $(2,0)$, cioè le mappe bilineari

$$\mathsf{T}: \ V^* \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dicono bivettori.
Altri esempi verranno considerati in seguito.

Veniamo ora alle operazioni che è possibile effettuare sui tensori.
Somma e prodotto per uno scalare. E' immediato che la somma di tensori di tipo (k,l) è un tensore di tipo (k,l), dove la somma è definita sommando fattore per fattore. Analogamente è un tensore di tipo (k,l) anche il prodotto di un tensore di uno scalare per un tensore di tipo (k,l). Ne segue che l'insieme dei tensori di tipo (k,l), $\mathscr{T}(k,l)$, risulta uno spazio vettoriale.

Esercizio Convincersi dell'affermazione precedente.
Esercizio Dimostrare che lo spazio vettoriale $\mathscr{T}(k,l)$ ha dimensione n^{k+l} se n è la dimensione di V.

Prodotto tensoriale. E' possibile definire una operazione di prodotto fra tensori, detta *prodotto tensoriale*. Dati un tensore T di tipo (k,l) e un tensore T' di tipo (k',l') il loro prodotto tensoriale è un tensore di tipo $(k+k', l+l')$ denotato con $\mathsf{T} \otimes \mathsf{T}'$, la cui azione è assegnata come segue. Siano dati $k+k'$ covettori $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k+k'}$ e $l+l'$ vettori $v_1, v_2, ..., v_{l+l'}$. Allora

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T} \otimes \mathsf{T}'(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^{k+k'}, v_1, v_2, ..., v_{l+l'}) = \\
&\mathsf{T}(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^k, v_1, v_2, ..., v_l)\mathsf{T}'(\alpha^{k+1}, \alpha^{k+2}, ..., \alpha^{k+k'}, v_{l+1}, v_{l+2}, ..., v_{l+l'})
\end{aligned}$$

Il prodotto tensoriale consente di costruire tensori di grado elevato da tensori di grado più basso. Ad esempio siano date una base $\{e_1, ..., e_n\}$ in V e la corrispondente base duale $\{e^1, ..., e^n\}$ in V^*. Consideriamo per fissare le idee tensori di tipo $(0,2)$, cioè forme bilineari. Fra questi tensori si distingue una famiglia i cui elementi hanno la forma $e^i \otimes e^k$, e la cui azione è data come segue:

$$e^i \otimes e^k(v,w) = e^i(v^l e_l) e^k(w^m e_m) = \delta^i_l \delta^k_m v^l w^m = v^i w^k$$

La famiglia di tensori appena definita è costituita di tensori linearmente indipendenti in $\mathscr{T}(0,2)$, e inoltre genera tutto lo spazio $\mathscr{T}(0,2)$; costituisce pertanto una base di $\mathscr{T}(0,2)$.
Proviamo questo fatto.
Indipendenza lineare. Data una combinazione lineare dei tensori della famiglia, $\mathsf{T} = \sum_{i,k}^n T_{i,k} e^i \otimes e^k$, se questa è nulla, allora i coefficienti della combinazione lineare sono nulli. É sufficiente applicare il tensore alla coppia di vettori (e_l, e_m), ottenendo

$$0 = \mathsf{T}(e_l, e_m) = \sum_{i,k}^n T_{i,k} e^i(e_l) \otimes e^k(e_m) = \sum_{i,k}^n T_{i,k} \delta^i_l \delta^k_m = T_{l,m}.$$

La famiglia $\{e^i \otimes e^k\}$ genera $\mathscr{T}(0,2)$. Infatti sia $\mathsf{T} \in \mathscr{T}(0,2)$. Si ha, per ogni coppia $(v,w) \in V \times V$,

$$\mathsf{T}(v,w) = \mathsf{T}(v^l e_l, w^m e_m) = \mathsf{T}(e_l, e_m) v^l w^m = \mathsf{T}(e_l, e_m) e^l(v) e^m(w) = \mathsf{T}(e_l, e_m) e^l \otimes e^m(v,w) \ ,$$

dunque definendo $T_{l,m} = \mathsf{T}(e_l, e_m)$ si ha che $\mathsf{T} = T_{l,m} e^l \otimes e^m$, cioè che T è combinazione lineare di elementi della famiglia $\{e^l \otimes e^m\}$, come volevasi dimostrare.
In particolare abbiamo che le componenti di T sulla base $\{e^l \otimes e^m\}$ sono date da $T_{l,m} = \mathsf{T}(e_l, e_m)$.
I prodotti tensoriali $\{e^i \otimes e^k\}$ sono in numero di n^2 (ci sono n modi di scegliere l'apice i fissato k ed n modi di scegliere l'apice k). Dunque lo spazio vettoriale $\mathscr{T}(0,2)$ ha dimensione n^2, se n è la dimensione dello spazio vettoriale base.
Analoghe considerazioni si estendono al caso di tensori di rango qualunque.
La famiglia $\{e^{\nu_1} \otimes e^{\nu_2} \otimes ... \otimes e^{\nu_l}\}$ è una base di $\mathscr{T}(0,l)$, e più in generale, i tensori della forma

$$e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes ... \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{\nu_1} \otimes e^{\nu_2} \otimes ... \otimes e^{\nu_l} \tag{3.2}$$

costituiscono una base di $\mathscr{T}(k,l)$.
Ne segue che ogni tensore di $\mathscr{T}(k,l)$ si rappresenta sotto la forma

$$\mathsf{T} = T^{\mu_1 ... \mu_k}_{\nu_1 ... \nu_l}\ e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes ... \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{\nu_1} \otimes e^{\nu_2} \otimes ... \otimes e^{\nu_l} \tag{3.3}$$

dove i coefficienti dello sviluppo, per linearità, sono dati da

$$T^{\mu_1 ... \mu_k}_{\nu_1 ... \nu_l} = \mathsf{T}(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, ..., e^{\mu_k}, e_{\nu_1}, e_{\nu_2}, ..., e_{\nu_l}) \tag{3.4}$$

L'insieme di numeri reali $T^{\mu_1 ... \mu_k}_{\nu_1 ... \nu_l}$, detti componenti del tensore, identificano il tensore univocamente una volta fissata la base.
Si prova facilmente mediante conteggio degli elementi della base che lo spazio $\mathscr{T}(k,l)$ ha dimensione n^{k+l}.
In termini di componenti il prodotto tensoriale si esegue in modo molto semplice. Se T ha componenti $T^{\mu_1 ... \mu_k}_{\nu_1 ... \nu_l}$ ed S ha componenti $S^{\mu_1 ... \mu_i}_{\nu_1 ... \nu_j}$ allora il prodotto tensoriale $\mathsf{T} \otimes \mathsf{S}$ ha componenti

$$(\mathsf{T} \otimes \mathsf{S})^{\mu_1 ... \mu_{k+i}}_{\nu_1 ... \nu_{l+j}} = T^{\mu_1 ... \mu_k}_{\nu_1 ... \nu_l} S^{\mu_1 ... \mu_i}_{\nu_1 ... \nu_j} \tag{3.5}$$

Contrazione di tensori.
Definiamo ora l'operazione di *contrazione* di tensori. Questa è una mappa

$$\mathscr{C} : \mathscr{T}(k,l) \longrightarrow \mathscr{T}(k-1, l-1) \tag{3.6}$$

Per definire l'operazione di contrazione $\mathscr{C}$ occorre dichiarare rispetto a quale coppia vettore-covettore si opera la contrazione. Supponiamo siano l'i-esima entrata covettoriale e la j-esima entrata vettoriale; si avrà così una contrazione $\mathscr{C}(i,j)$; scelta tale coppia, e assegnata una qualunque base di V e la sua duale in V^* si definisce

$$\mathscr{C}(i,j)\mathsf{T} = \sum_{\sigma=1}^{n} \mathsf{T}(..., e^\sigma ...; ..., e_\sigma ...) \tag{3.7}$$

dove e^σ occupa la i-esima entrata covettoriale di T e e_σ la j-esima entrata vettoriale di T. Tale definizione è indipendente dalla base scelta. Ad esempio, consideriamo la contrazione di un tensore di tipo $(1,1)$. Vi è un solo modo per effettuarla, e il risultato sarà un tensore di tipo $(0,0)$, cioè uno scalare. Precisamente si ha

$$\mathscr{C}(1,1)\mathsf{T} = \sum_{\sigma=1}^{n} \mathsf{T}(e^\sigma; e_\sigma) \tag{3.8}$$

e si riconosce che essa coincide con la traccia di T pensato come operatore lineare. La contrazione di un tensore ha una espressione particolarmente semplice in termini di componenti.

$$[\mathscr{C}(i,j)\mathsf{T}]^{\mu_1\ldots\mu_{k-1}}_{\nu_1\ldots\nu_{l-1}} = \sum_{\sigma=1}^{n} T^{\mu_1\ldots\sigma\ldots\mu_{k-1}}_{\nu_1\ldots\sigma\ldots\nu_{l-1}} = T^{\mu_1\ldots\sigma\ldots\mu_{k-1}}_{\nu_1\ldots\sigma\ldots\nu_{l-1}} \tag{3.9}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è adottata la convenzione della sommatoria di Einstein.
L'operazione di contrazione di un indice covettoriale e un indice vettoriale si dice spesso, soprattutto in ambito fisico, *saturazione* dei due indici.
Nella rappresentazione per componenti è immediato che la contrazione di un tensore di tipo $(1,1)$ è data dalla traccia della associata applicazione lineare:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} T^{\sigma}_{\sigma} = T^{\sigma}_{\sigma} \ .$$

Cambiamento di base.
Siamo ora interessati a stabilire come si trasformano le componenti di un tensore al variare della base in V. In questo paragrafo, per ridurre al minimo la possibilità di confusione fra la natura dei vari enti, gli elementi di una base in V o gli elementi della base duale in V^* vengono indicati in carattere grassetto.
L'esempio zero è quello dei tensori di tipo $(0,0)$, per i quali la dipendenza delle componenti dalla base è banale: si tratta di scalari e non dipendono dalla base.
Consideriamo ora i tensori di tipo $(0,1)$, che abbiamo già identificato con i vettori di V: $\mathscr{T}(0,1) \cong V$. Sia data una base $\{\mathbf{e}_\nu\}_{\nu=1}^n$ in V; ogni elemento di $\mathbf{v} \in V$ si scrive come combinazione lineare di elementi della base:

$$\mathbf{v} = \sum_{\nu=1}^{n} v^\nu \mathbf{e}_\nu \equiv v^\nu \mathbf{e}_\nu$$

Data una seconda base di V, $\{\overline{\mathbf{e}}_\mu\}_{\mu=1}^n$, questa è necessariamente legata alla prima dalla relazione (convenzione della sommatoria)

$$\overline{\mathbf{e}}_\mu = A^\nu_\mu \ \mathbf{e}_\nu \tag{3.10}$$

dove i coefficienti A^ν_μ possono essere interpretati come gli elementi di una matrice di $GL(n,\mathbb{R})$, ovvero una matrice non singolare a coefficienti reali. Corrispondentemente per il vettore $\mathbf{v} \in V$ si avranno le due rappresentazioni equivalenti

$$\mathbf{v} = \overline{v}^\mu \ \overline{\mathbf{e}}_\mu = v^\nu \ \mathbf{e}_\nu$$

e dunque,

$$\overline{v}^\mu \ \overline{\mathbf{e}}_\mu = \overline{v}^\mu \ A^\nu_\mu \ \mathbf{e}_\nu = v^\nu \ \mathbf{e}_\nu$$

da cui infine la relazione

$$v^\nu = A^\nu_\mu \ \overline{v}^\mu \equiv \sum_{\mu=1}^{n} \ A^\nu_\mu \ \overline{v}^\mu \tag{3.11}$$

Si noti che la base in V e le componenti sulle basi cambiano in modo differente.
Se si interpreta formalmente la 3.9 come un prodotto righe per colonne della matrice invertibile A di componenti (A^ν_μ) (per convenzione l'indice in basso è indice di riga, l'indice in alto indice di colonna)

per il vettore a n righe e 1 colonna $\mathbf{e} \equiv (\mathbf{e}_\mu)$, e dunque si scrive, con ovvia notazione,

$$\overline{\mathbf{e}} = A\ \mathbf{e} \tag{3.12}$$

allora la 3.11 diventa

$$\overline{\mathbf{v}} = (A^{-1})^t\ \mathbf{v} \tag{3.13}$$

Scrivendo esplicitamente il prodotto righe per colonne della matrice $(A^{-1})^t$ per il vettore, $\mathbf{v}$, la precedente equivale in termini di componenti a

$$\overline{v}^\mu = [(A^{-1})^t]^\nu_\mu\ v^\nu = (A^{-1})^\mu_\nu\ v^\nu\ . \tag{3.14}$$

che inverte la 3.10.
Consideriamo ora il caso di una 1-forma in V^*, ovvero un tensore di tipo $(1,0)$. Introduciamo due basi in V^*, e in particolare scegliamo le basi duali di $\{\mathbf{e}_\mu\}$ ed $\{\overline{\mathbf{e}}_\mu\}$, che indichiamo rispettivamente con $\{\mathbf{e}^\mu\}$ e $\{\overline{\mathbf{e}}^\mu\}$. Ricordiamo che si ha

$$v^\mu = \mathbf{e}^\mu(\mathbf{v}), \qquad \overline{v}^\nu = \overline{\mathbf{e}}^\nu(\mathbf{v}) \qquad \mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\lambda) = \delta^\mu_\lambda$$

per linearità e per definizione di base duale si ottiene

$$\mathbf{e}^\mu(\mathbf{v}) = \mathbf{e}^\mu\ (\overline{v}^\nu\ \overline{\mathbf{e}}_\nu) = \overline{v}^\nu\ \mathbf{e}^\mu\ (A^\lambda_\nu \mathbf{e}_\lambda) = \overline{v}^\nu A^\lambda_\nu \mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\lambda) = A^\mu_\nu\ \overline{\mathbf{e}}^\nu(\mathbf{v})$$

Dunque la relazione fra basi duali indotta dalla relazione fra basi in V^* è data da

$$\mathbf{e}^\mu = A^\mu_\nu\ \overline{\mathbf{e}}^\nu \tag{3.15}$$

Notiamo che anche in questo caso possiamo interpretare la relazione precedente come l'azione di una matrice di $GL(n,\mathbb{R})$ sulla base data da $\mathbf{e}^* = (\mathbf{e}^\mu)$, interpretata come un vettore colonna i cui elementi sono covettori; il risultato è la nuova base duale $\overline{\mathbf{e}}^*$

$$\overline{\mathbf{e}}^* = (A^{-1})^t\ \mathbf{e}^*$$

Per quanto riguarda le componenti nelle due basi si avrà, dato il generico elemento $\alpha \in V^*$:

$$\alpha = \overline{\alpha}_\nu\ \overline{\mathbf{e}}^\nu = \alpha_\mu\ \mathbf{e}^\mu\ ;$$

grazie alla relazione fra basi duali appena determinata segue

$$\overline{\alpha}_\nu\ \overline{\mathbf{e}}^\nu = \alpha_\nu A^\nu_\lambda\ \mathbf{e}^\lambda \tag{3.16}$$

e infine

$$\overline{\alpha}_\nu = A^\lambda_\nu\ \alpha_\lambda\ . \tag{3.17}$$

Ricapitolando, in termini matriciali, e adottando le stesse convenzioni già menzionate, si ha dunque per basi e componenti di covettori e vettori rispettivamente:

$$\overline{\mathbf{e}}^* = (A^{-1})^t\ \mathbf{e}^* \qquad\qquad \overline{\alpha} = A\alpha \tag{3.18}$$

$$\overline{\mathbf{e}} = A\ \mathbf{e} \qquad\qquad \overline{\mathbf{v}} = (A^{-1})^t\ \mathbf{v} \tag{3.19}$$

Poichè le componenti di un covettore variano allo stesso modo dei vettori della base $\mathbf{e}$ di V a volte i covettori vengono detti vettori covarianti, mentre vengono detti vettori controvarianti i vettori di V. Passiamo ora ai tensori di rango 2.

Esaminiamo un generico tensore di tipo $(0,2)$, ovvero una forma bilineare, per il quale vale la seguente rappresentazione nelle due basi

$$\mathsf{T} = T_{\lambda\rho}\ \mathbf{e}^\lambda \otimes \mathbf{e}^\rho = \overline{T}_{\mu\nu}\ \overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}^\nu\ .$$

Vogliamo determinare la relazione fra le componenti del tensore nelle due differenti basi. Essendo $\overline{\mathbf{e}}^* = (A^{-1})^t\ \mathbf{e}^*$ segue anche $\mathbf{e}^* = A^t\ \overline{\mathbf{e}}^*$ o esplicitamente (si ricordi che l'indice in alto è l'indice di colonna)

$$\mathbf{e}^\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} (A^t)^\mu_\lambda\ \overline{\mathbf{e}}^\mu = \sum_{\mu=1}^{n} A^\lambda_\mu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu = A^\lambda_\mu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu\ ,$$

dove per maggior chiarezza si è abbandonata nei primi passaggi la convenzione della sommatoria, ripristinata nell'ultimo.
Pertanto, sostituendo si ottiene

$$\overline{T}_{\mu\nu}\ \overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}^\nu = T_{\lambda\rho}\ A^\lambda_\mu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes A^\rho_\nu\ \overline{\mathbf{e}}^\nu = T_{\lambda\rho} A^\lambda_\mu A^\rho_\nu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}^\nu$$

e infine identificando i coefficienti dello sviluppo sulla base $\overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}^\nu$ si ottiene la relazione fra le componenti del tensore T nelle due basi

(3.20)
$$\overline{T}_{\mu\nu} = T_{\lambda\rho} A^\lambda_\mu A^\rho_\nu$$

Poichè la legge di variazione dei tensori di tipo $(0,2)$ su ciascuno degli indici è analoga alla legge di variazione delle componenti dei covettori, questi tensori vengono detti anche *tensori due volte covarianti.*
Nel caso dei tensori di rango 2 è ancora comoda una rappresentazione matriciale delle componenti, che facilita talvolta la scrittura della rappresentazione in basi diverse. Convenendo che le componenti di una forma bilineare (un tensore due volte covariante) siano disposte in una matrice quadrata con l'indice a destra indice di colonna e l'indice di sinistra indice di riga, la relazione precedente può essere interpretata come un prodotto righe per colonne di matrici:

(3.21)
$$\overline{T} = A\ T\ A^t$$

Veniamo ora al caso dei tensori di tipo $(2,0)$.
Si procede in modo analogo:

$$\mathsf{T} = T^{\lambda\rho}\ \mathbf{e}_\lambda \otimes \mathbf{e}_\rho = \overline{T}^{\mu\nu}\ \overline{\mathbf{e}}_\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}_\nu\ ,$$

e si utilizza la relazione $\mathbf{e}_\lambda = (A^{-1})^\mu_\lambda\ \overline{\mathbf{e}}_\mu$; si ottiene

$$\overline{T}^{\mu\nu}\ \overline{\mathbf{e}}_\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}_\nu = T^{\lambda\rho}\ (A^{-1})^\mu_\lambda\ \overline{\mathbf{e}}_\mu\ \otimes\ (A^{-1})^\nu_\rho\ \overline{\mathbf{e}}_\nu = T^{\lambda\rho}(A^{-1})^\mu_\lambda\ (A^{-1})^\nu_\rho\ \overline{\mathbf{e}}_\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}_\nu$$

e dunque

(3.22)
$$\overline{T}^{\mu\nu} = T^{\lambda\rho}(A^{-1})^\mu_\lambda\ (A^{-1})^\nu_\rho$$

Si constata che le componenti di un tensore di tipo $(2,0)$ cambiano in corrispondenza di ogni indice come le componenti di un vettore, e questo motiva la denominazione dei tensori di tipo $(2,0)$ come *tensori due volte controvarianti.*
Infine, consideriamo il caso di tensori di tipo $(1,1)$. Ancora una volta scriviamo

$$\mathsf{T} = T^\lambda_\rho\ \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}_\lambda = \overline{T}^\nu_\mu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}_\nu\ ,$$

e sostituiamo le relazioni $\mathbf{e}^\rho = A^\rho_\mu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu$, $\mathbf{e}_\lambda = (A^{-1})^\nu_\lambda\ \overline{\mathbf{e}}_\nu$, ottenendo

$$T^\lambda_\rho\ \mathbf{e}^\rho \otimes \mathbf{e}_\lambda = T^\lambda_\rho\ A^\rho_\mu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu\ \otimes (A^{-1})^\nu_\lambda\ \overline{\mathbf{e}}_\nu = T^\lambda_\rho\ A^\rho_\mu\ (A^{-1})^\nu_\lambda\ \overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}_\nu = \overline{T}^\nu_\mu\ \overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}_\nu$$

e infine identificando le componenti sulla base $\overline{\mathbf{e}}^\mu \otimes \overline{\mathbf{e}}_\nu$ la relazione

$$\overline{T}^\nu_\mu = T^\lambda_\rho\ A^\rho_\mu\ (A^{-1})^\nu_\lambda \tag{3.23}$$

Ai tensori di tipo $(1,1)$ si da il nome di *tensori una volta controvarianti e una volta covarianti.* Anche a quest'ultima relazione può essere data una forma matriciale, sempre adottando la convenzione che indici in alto sono indici di colonna e indici in basso indici di riga. Si ottiene

$$\overline{T} = ATA^{-1} \tag{3.24}$$

nella quale si riconosce la ben nota relazione di similitudine che lega le matrici associate allo stesso operatore lineare espresse in basi differenti.

Ricavate le leggi con cui cambiano le componenti dei tensori di rango 1 e 2, è facile estendere la legge del cambiamento di base a tensori di rango qualunque. Se la base in V cambia da $\{\mathbf{e}\}$ ad $\{\overline{\mathbf{e}}\}$, la base di $\mathscr{T}(k,l)$

$$\mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \mathbf{e}_{\mu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{\mu_k} \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \mathbf{e}^{\nu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{\nu_l}$$

cambia in

$$\overline{\mathbf{e}}_{\rho_1} \otimes \overline{\mathbf{e}}_{\rho_2} \otimes ... \otimes \overline{\mathbf{e}}_{\rho_k} \otimes \overline{\mathbf{e}}^{\lambda_1} \otimes \overline{\mathbf{e}}^{\lambda_2} \otimes ... \otimes \overline{\mathbf{e}}^{\lambda_l}$$

e per linearità, grazie alle $\mathbf{e}^\nu = A^\nu_\rho\ \overline{\mathbf{e}}^\rho$, $\mathbf{e}_\mu = (A^{-1})^\lambda_\mu\ \overline{\mathbf{e}}_\lambda$, la relazione fra le due basi di $\mathscr{T}(k,l)$ risulta

$$\mathbf{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{\mu_k} \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{\nu_l} = A^{\nu_1}_{\rho_1}\ A^{\nu_l}_{\rho_l}\ (A^{-1})^{\lambda_1}_{\mu_1}\ (A^{-1})^{\lambda_k}_{\mu_k}\ \overline{\mathbf{e}}_{\lambda_1} \otimes ... \otimes \overline{\mathbf{e}}_{\lambda_k} \otimes \overline{\mathbf{e}}^{\rho_1} \otimes ... \otimes \overline{\mathbf{e}}^{\rho_l}$$

Consideriamo dunque un tensore di tipo (k,l) e la sua rappresentazione nelle due basi:

$$\mathsf{T} = T^{\mu_1...\mu_k}_{\nu_1...\nu_l}\ e_{\mu_1} \otimes ... \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{\nu_1} \otimes ... \otimes e^{\nu_l} = \overline{T}^{\lambda_1...\lambda_k}_{\rho_1...\rho_l}\ \overline{\mathbf{e}}_{\lambda_1} \otimes ... \otimes \overline{\mathbf{e}}_{\lambda_k} \otimes \overline{\mathbf{e}}^{\rho_1} \otimes ... \otimes \overline{\mathbf{e}}^{\rho_l}$$

Come in precedenza, sostituendo in quest'ultima la relazione fra le due basi di $\mathscr{T}(k,l)$ e identificando le componenti si ottiene infine

$$\overline{T}^{\lambda_1...\lambda_k}_{\rho_1...\rho_l} = A^{\nu_1}_{\rho_1}\ A^{\nu_l}_{\rho_l}\ (A^{-1})^{\lambda_1}_{\mu_1}\ (A^{-1})^{\lambda_k}_{\mu_k}\ T^{\mu_1...\mu_k}_{\nu_1...\nu_l} \tag{3.25}$$

L'equazione precedente definisce il legame fra le componenti su basi differenti di un generico tensore. A differenza che nel caso dei tensori di rango 1 e 2 non vi sono rappresentazioni matriciali efficaci di questa relazione.

Esercizio Si mostri che la contrazione di un indice covariante e un indice controvariante di un tensore, come affermato, manda tensori di tipo (k,l) in tensori di tipo $(k-1,l-1)$.

Esercizio Si verifichi che le componenti del prodotto tensoriale di $\mathsf{R} \in \mathscr{T}(k,l)$ e $\mathsf{S} \in \mathscr{T}(j,m)$ si trasformano come le componenti di un tensore di tipo $\mathsf{T} \in \mathscr{T}(k+j,l+m)$ per un cambio di base in V.

3.2. **Tensori in uno spazio affine.** L'algebra multilineare su uno spazio vettoriale, sviluppata nei paragrafi precedenti, non è sufficiente per le esigenze della descrizione matematica di particelle o campi classici. La ragione è che l'arena nella quale hanno luogo i fenomeni fisici, relativistici e non, è uno spazio di *punti*, e non di *vettori.* Anche quando compaiono vettori associati a grandezze fisiche, spesso si tratta di vettori applicati, e non di vettori liberi (cioè degli elementi di uno spazio vettoriale). Si pensi ad esempio, anche in meccanica newtoniana, al campo gravitazionale classico, o al campo elettrostatico, che sono assegnazioni di un vettore per ogni punto dello spazio. Inoltre la dipendenza di tali vettori dal punto spaziale, in tutti i casi significativi, ad esempio quelli appena citati, è non

lineare. Infine è opportuno e spesso necessario poter effettuare trasformazioni tra punti, anch'esse in generale non lineari, e utilizzare sistemi di coordinate curvilinee più o meno arbitrarie. Per procedere nell'analisi, è dunque necessario potere trattare liberamente di punti dello spazio, di applicazioni fra punti, di mappe che abbiano eventualmente carattere vettoriale o tensoriale. L'oggetto geometrico più semplice che consente tale libertà è uno spazio affine, di cui qui si richiama brevemente la definizione.

Uno spazio affine $(\mathbb{A}, V)$ è il dato di

- un insieme $\mathbb{A}$ i cui elementi vengono detti *punti*;
- uno spazio vettoriale V, detto *spazio delle traslazioni*;
- una applicazione $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$,

con le seguenti proprietà:

(**A1**) per ogni coppia di punti P, Q in $\mathbb{A}$ esiste uno ed un solo vettore $\mathbf{v} \in V$ tale che $Q + \mathbf{v} = P$; il vettore $\mathbf{v}$ viene indicato con $\mathbf{v} = P - Q$;

(**A2**) per ogni punto P e ogni coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ si ha $P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

IL vettore $\mathbf{v} \equiv P - Q$ è un *vettore libero*, mentre la coppia $(P, \mathbf{v})$ è un *vettore applicato.* La dimensione dello spazio affine per definizione coincide con la dimensione dello spazio delle traslazioni V. Consideriamo pertanto uno spazio affine $(\mathbb{A}, V)$ con spazio delle traslazioni V di dimensione n; quando sarà chiaro dal contesto verrà omessa la menzione dello spazio vettoriale di traslazione V e si scriverà semplicemente $\mathbb{A}$.

Un riferimento affine costituito da un'*origine* fissata $O \in \mathbb{A}$ ed una base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ di V, indicato con $(O, \mathbf{e}_\alpha)$, assegna coordinate affini (o cartesiane) $\{\xi^\alpha(P)\}$ ad ogni punto P di $\mathbb{A}$ tramite la mappa

$$P = \xi^\alpha(P)\mathbf{e}_\alpha + O \tag{3.26}$$

dove è sottintesa, come sempre nel seguito, la convenzione della sommatoria. L'equazione precedente si trova spesso scritta sotto la forma equivalente $P - 0 = \xi^\alpha(P)\mathbf{e}_\alpha$.

Si ha dunque, una mappa bijettiva

$$\mathbb{A} \ni P \mapsto (\xi^\alpha) = \psi(P) \in \mathbb{R}^n$$

che costituisce un sistema di coordinate globale dello spazio affine, il quale risulta pertanto identificabile globalmente con $\mathbb{R}^n$ (e così dotato della struttura topologica e differenziabile di $\mathbb{R}^n$).

Come esempi privilegiati si possono considerare lo spazio euclideo della geometria elementare $(\mathbb{E}, \mathbb{R}^3) \equiv \mathbb{E}^3$, lo spazio tempo di Galileo $(\mathbb{G}, \mathbb{R}^4)$ o lo spazio di Minkowski $(\mathbb{M}, \mathbb{R}^4) \equiv \mathbb{M}^4$.

Se lo spazio vettoriale delle traslazioni è dotato di un prodotto scalare, allora si dice che lo spazio affine è *euclideo* se tale prodotto scalare è positivo definito, mentre si dice *pseudoeuclideo* se il prodotto scalare è indefinito. Il prototipo del primo caso è $\mathbb{E}^3$, mentre l'esempio privilegiato del secondo è $\mathbb{M}^4$.

Il fatto che uno spazio affine disponga della struttura topologica e differenziabile di $\mathbb{R}^n$ consente di considerare funzioni arbitrarie sullo spazio affine (o sui suoi sottoinsiemi, che ereditano la topologia delle loro immagini in $\mathbb{R}^n$) e in particolare rende ad esse applicabili le usuali nozioni dell'analisi.

Si dice *campo scalare* una una mappa

$$f : \mathbb{M}^4 \to \mathbb{R}$$

Assegnate le coordinate affini su $\mathbb{M}$, ovvero la mappa ψ la rappresentazione della funzione f sarà la funzione reale di n variabili reali $f \circ \psi^{-1} \equiv f_\psi$,

$$\mathbb{R}^4 \ni (\xi^\alpha) \mapsto f_\psi(\xi^\alpha) \in \mathbb{R}$$

Poichè $f(P)$ ha un significato (è un ben fissato numero reale) indipendentemente dalla rappresentazione per coordinate affini di P, dato dunque un secondo sistema di coordinate affini $\overline{\xi}^\beta$ descritto dalla mappa $\overline{\psi} : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^n$, dovrà aversi

$$f_\psi(\xi^\alpha) = f_{\overline{\psi}}(\overline{\xi}^\beta)$$

L'espressione precedente scritta per esteso è l'ovvia identità

$$f_\psi(\xi^\alpha(P)) = f \circ \psi^{-1}(\psi(P)) = f \circ \overline{\psi}^{-1}(\overline{\psi}(P)) = f_{\overline{\psi}}(\overline{\xi}^\beta(P))$$

Poiché ogni trasformazione affine è della forma

$$\overline{\xi} = L\xi + b, \qquad \xi = L^{-1}(\overline{\xi} - b)$$

(dove per brevità con ξ e $\overline{\xi}$ si indica il vettore colonna delle coordinate del punto P), si avrà dunque

$$f_{\overline{\psi}}(\overline{\xi}) = f_\psi(L^{-1}(\overline{\xi} - b))$$

Quando non vi è rischio di ambiguità (e in molte trattazioni anche quando ve ne è) con abuso di notazione si tende a omettere il riferimento alla particolare coordinatizzazione locale, scrivendo ad esempio espressioni come

$$\overline{f}(\overline{\xi}) = f(\xi)$$

o

$$\overline{f}(\overline{\xi}) = f(L^{-1}(\overline{\xi} - b))$$

per esprimere il carattere scalare del campo f.
Oltre ai campi scalari possono essere introdotti in modo analogo i campi vettoriali. Questi saranno dati da mappe che associano ad ogni punto dello spazio affine un vettore: $X : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n$. Assegnato un riferimento affine (e quindi in particolare una base in $\mathbb{R}^n$) essi avranno una rappresentazione coordinata mediante n funzioni delle coordinate affini nel riferimento scelto. In questo caso, il cambiamento di base nello spazio vettoriale bersaglio $\mathbb{R}^n$ induce il corrispondente cambiamento sulle componenti del campo vettoriale. Si avrà (omettendo il riferimento esplicito alla rappresentazione locale)

$$X = X^\mu(\xi)e_\mu = \overline{X}^\nu(\overline{\xi})\overline{e}_\nu$$

e tenendo conto del fatto che $\overline{e}_\nu = A^\mu_\nu e_\mu$ per le componenti del campo vettoriale si ha la legge di trasformazione (rispetto alla trasformazione scritta precedentemente è $L = (A^{-1})^t$)

$$\overline{X}^\mu(\overline{\xi}) = (A^{-1})^\mu_\nu X^\nu(A^t(\overline{\xi} - b)) \ .$$

In modo del tutto analogo si scrive la legge di variazione delle componenti di un campo di covettori, ovvero di una mappa che associa ad ogni punto dello spazio affine un covettore. Sia infatti $\omega : \mathbb{A} \to (\mathbb{R}^n)^*$, o in componenti su una base affine $\omega = \omega_\mu e^\mu$.
Si avrà:

$$\overline{\omega}_\mu(\overline{\xi}) = A^\nu_\mu \omega_\nu(A^t(\overline{\xi} - b)) \ .$$

Questo tipo di mappa è noto sotto il nome di *1-forma*.
Un esempio ben noto è quello del differenziale di una funzione scalare. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; si ha

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} e^\mu = \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} d\xi^\mu$$

dove si è denotato, secondo l'uso, $e^\mu = d\xi^\mu$. Effettuando la trasformazione di coordinate $\xi = A^t(\overline{\xi}-b)$ si ottiene, per l'invarianza in forma del differenziale,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\xi}^\rho}\overline{e}^\rho = \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} e^\mu = \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu} A^\mu_\rho \overline{e}^\rho$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\xi}^\rho} = A^\mu_\rho \frac{\partial f}{\partial \xi^\mu}$$

Allo stesso modo si può introdurre un qualunque campo a valori nell'insieme dei tensori di tipo $(0,l)$, le cui componenti avranno una legge di variazione al variare della base data da

$$\overline{T}_{\nu_1,\dots,\nu_l}(\overline{\xi}) = A^{\mu_1}_{\nu_1} \dots A^{\mu_l}_{\nu_l}\; T_{\mu_1,\dots,\mu_l}(A^t(\overline{\xi}-b))\ .$$

o più in generale un qualunque campo a valori nello spazio dei tensori di tipo (k,l), con legge delle variazione delle componenti della forma

$$\overline{T}^{\rho_1,\dots,\rho_k}_{\nu_1,\dots,\nu_l}(\overline{\xi}) = A^{\mu_1}_{\nu_1} \dots A^{\mu_l}_{\nu_l} (A^{-1})^{\rho_1}_{\lambda_1}\; (A^{-1})^{\rho_k}_{\lambda_k}\; T^{\lambda_1,\dots,\lambda_k}_{\mu_1,\dots,\mu_l}(A^t(\overline{\xi}-b))\ .$$

In uno spazio affine munito di prodotto interno i riferimenti affini possono essere scelti come riferimenti *ortonormali*, nel qual caso si dicono riferimenti cartesiani ortonormali.

Vogliamo ora introdurre sistemi di coordinate arbitrari, in generale non cartesiani.
Consideriamo uno spazio affine $(\mathbb{A}, V)$, e sia $\mathscr{O}$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{A}$. Sia data una mappa bijettiva $\psi : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$, o esplicitamente

$$\mathscr{O} \ni P \mapsto \psi(P) = (x^1(P), \dots, x^n(P)) \in \mathbb{R}^n\ .$$

Tale mappa costituisce un sistema di coordinate in $\mathscr{O}$. La coppia $(\mathscr{O}, \psi)$ si dice carta in $\mathscr{O}$. Due carte $(\mathscr{O}_1, \psi_1)$ e $(\mathscr{O}_2, \psi_2)$ con $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2$ non vuoto, si dicono compatibili se la mappa di transizione, o di cambiamento di coordinate,

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2) \to \psi_2(\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2)$$

data in coordinate dalle funzioni

$$\overline{x}^\alpha = \overline{x}^\alpha(x^1, \dots, x^n), \qquad \alpha = 1, \dots, n$$

è un diffeomorfismo, ovvero che la trasformazione suddetta sia differenziabile, e con inversa differenziabile. Questo si traduce nella richiesta che la matrice Jacobiana

$$J \equiv \left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right]$$

della trasformazione di coordinate $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ sia invertibile in $\psi_1(\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2)$ o equivalentemente che il suo determinante Jacobiano

$$|J| = \det\left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right]$$

sia non nullo nello stesso insieme.
Usualmente si assume che il diffeomorfismo sia di classe C^∞.
Si dice atlante differenziabile una famiglia di carte compatibili $(\mathscr{O}_\eta, \psi_\eta)$ tale che $\bigcup \mathscr{O}_\eta = \mathbb{A}$.
E' forse noto al lettore che si dice varietà differenziabile un insieme munito di un atlante differenziabile. Pertanto, uno spazio affine è una varietà differenziabile ed un suo atlante è dato dall'unica carta $(\mathbb{A}, \xi)$, dove ξ è la mappa che manda ogni punto P nelle sue coordinate cartesiane rispetto ad un fissato riferimento. Munito lo spazio affine di sistemi di coordinate globali o locali, cioè di un

atlante, mostriamo come questa struttura consenta di istituire un calcolo differenziale sullo spazio medesimo.
La funzione $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile se fissato un sistema di coordinate in $\mathscr{O}$ con coordinate $\psi(P) = x^1(P), ..., x^n(P)$, la funzione $f \circ \psi^{-1} : \psi(\mathscr{O}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile. Concretamente, deve essere differenziabile la funzione di n variabili reali

$$\mathbb{R}^n \ni (x^1, ..., x^n) \mapsto f(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R} \ .$$

E' fondamentale osservare che la differenziabilità è indipendente dal sistema di coordinate locali scelto. Infatti, poichè le carte di un atlante sono per ipotesi compatibili, se la funzione $f \circ \psi_1^{-1}$ è differenziabile, tale è anche la funzione $f \circ \psi_2^{-1} = (f \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ \psi_2^{-1})$, cioè il suo rappresentante locale in una carta differente.
In modo analogo si definisce una curva differenziabile in $\mathbb{A}$.
Una curva differenziabile è una mappa $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{A}$ tale che se $\gamma([t_1, t_2]) \subset \mathscr{O}$ con $(\mathscr{O}, \psi)$ sistema di coordinate locali in $\mathbb{A}$, la curva in $\mathbb{R}^n$ data da $\psi \circ \gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile.